Olympiade Francophone de Mathématiques

Deuxième édition

Épreuve Junior

27 mars 2021

Durée : 4 heures et demie.
Difficulté : Les exercices *ne sont pas* classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

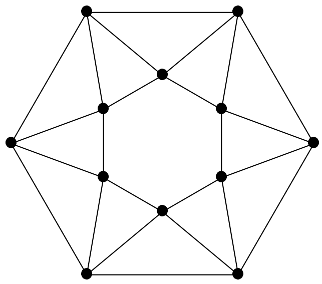
1. On considère les nombres R et S définis par

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{223}{224} \quad \text{et} \quad S = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{224}{225}.$$

Montrer que

$$R < \frac{1}{15} < S.$$

2. Évariste a dessiné douze triangles de manière circulaire de sorte que deux triangles consécutifs aient exactement un côté en commun.



Sophie décide de colorier les côtés de ces triangles en bleu, rouge ou vert. Parmi les 3^{24} manières qu'a Sophie de colorier les côtés des triangles, combien satisfont la propriété que chacun des douze triangles ait un coté bleu, un coté rouge et un côté vert ?

3. On a colorié tous les points du plan en rouge ou en bleu. Montrer qu'au moins l'un des deux énoncés suivants est vrai :

- Il existe deux points rouges à une distance 1 l'un de l'autre.
- Il existe quatre points bleus B_1, B_2, B_3, B_4 tels que la distance de B_i à B_j est égale à $|i-j|$ pour tous les entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$.

4. On note $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ telles que, pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{PGCD}\big(f(m), n\big) + \mathrm{PPCM}\big(m, f(n)\big) = \mathrm{PGCD}\big(m, f(n)\big) + \mathrm{PPCM}\big(f(m), n\big).$$

Remarque : Pour des entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, on note $\mathrm{PGCD}(a,b)$ le plus grand nombre entier strictement positif qui divise a et b et $\mathrm{PPCM}(a,b)$ le plus petit nombre entier strictement positif qui soit multiple de a et b.