Olympiade Francophone de Mathématiques

Troisième édition

Épreuve Senior

Samedi 21 mai 2022

N.B. : Les problèmes ne sont pas classés selon leur difficulté.

1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers m et n :

$$f(m+n) + f(m)f(n) = n^2(f(m)+1) + m^2(f(n)+1) + mn(2-mn).$$

2. Pour se connecter au site de l'OFM, Alice doit choisir un mot de passe. Ce dernier doit être formé de n caractères parmi les 27 caractères suivants :

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ Y,\ Z,\ \#.$$

On dit qu'un mot de passe m est *redondant* si on peut colorier en rouge et bleu un bloc de lettres consécutives de m de telle manière que le mot formé des lettres rouges soit identique au mot formé des lettres bleues. Par exemple, le mot de passe $H\#ZBZJBJZ$ est redondant, car il contient le bloc $ZBZJBJ$, où le mot ZBJ apparaît à la fois en bleu et en rouge. Au contraire, le mot de passe $ABCACB$ n'est pas redondant.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au moins 18^n mots de passe de longueur n, c'est-à-dire formés de n caractères chacun, qui ne sont pas redondants.

3. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note Δ la tangente en A au cercle Γ. Soit Γ_1 un cercle tangent aux droites Δ, (AB) et (BC), et E son point de tangence avec la droite (AB). Soit Γ_2 un cercle tangent aux droites Δ, (AC) et (BC), et F son point de tangence avec la droite (AC).

On suppose que E et F appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, et que les deux cercles Γ_1 et Γ_2 se trouvent à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

4. Trouver tous les entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ tels que a soit pair et tous les chiffres de l'écriture décimale de $a^b + 1$ soient égaux.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points