Olympiade Francophone de Mathématiques – Édition 2020

Épreuve Junior

Problème 1

Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$, ω son cercle inscrit et Γ son cercle circonscrit. Soit également ω_b le cercle exinscrit relatif au sommet B, c'est-à-dire le cercle tangent aux droites (AB), (BC), (CA) et séparé de B par la droite (AC), puis B' le point de tangence entre ω_b et (AC). De même, soit le cercle ω_c le cercle exinscrit relatif au sommet C, c'est-à-dire le cercle tangent aux droites (AB), (BC), (CA) et séparé de C par la droite (AB), puis C' le point de tangence entre ω_c et (AB). Enfin, soit I le centre de ω et X le point de Γ tel que $\widehat{XAI}$ soit un angle droit.

Démontrer que les triangles XBC' et XCB' sont isométriques, c'est-à-dire que $XB = XC$, $BC' = CB'$ et $C'X = B'X$.

§ Solution

La droite (AX) est la bissectrice extérieure de ABC issue de A, donc X est le milieu de l'arc $\overline{BC}$ sur le cercle Γ. Cela signifie en particulier que $BX = CX$. D'autre part, soit C_a et C_b les points de tangence respectifs de ω_c avec (AC) et (BC). En vertu des égalités de longueur $AC' = AC_a$, $BC' = BC_b$ et $CC_a = CC_b$, on vérifie que

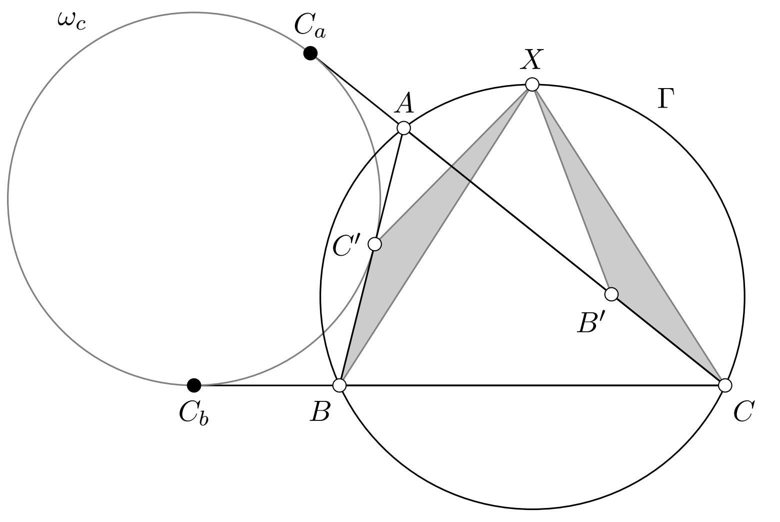
$$\begin{aligned} BC' &= BC_b = CC_b - BC = CC_a - BC = AC - BC + AC_a \\ &= AC - BC + AC' = AB + AC - BC - BC', \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $BC' = (AB + AC - BC)/2$. On démontre de même que $CB' = (AB + AC - BC)/2$.

Les triangles XBC' et $XB'C$ ont donc déjà deux côtés de même longueur. Nous allons conclure en montrant qu'ils ont également un angle de même mesure. En effet, puisque la droite (AX) ne passe pas par l'intérieur du triangle ABC, on sait que A et X sont situés du même côté de (BC). On en déduit que

$$\widehat{XBC'} = \widehat{XBA} = \widehat{XCA} = \widehat{XCB'},$$

ce qui conclut en effet.



■ Problème 2

L'empereur Zorg souhaite fonder une colonie sur une nouvelle planète. Chacune des n villes qu'il y établira devra parler exactement une des 2020 langues officielles de l'empire. Certaines villes de la colonie seront reliées par une liaison aérienne directe, chaque liaison pouvant être empruntée dans les deux sens. L'empereur a fixé le coût du billet de chaque liaison à 1 crédit galactique. Il souhaite que, étant données deux villes quelconques parlant la même langue, il soit toujours possible de voyager de l'une à l'autre via ces liaisons aériennes, et que le voyage le moins cher entre ces deux villes coûte exactement 2020 crédits galactiques.

Pour quelles valeurs de n l'empereur Zorg peut-il réaliser son rêve ?

---

§ Solution n°1

Dans la suite, nous allons poser $k = 2020$, puis représenter la colonie rêvée de l'empereur Zorg par un graphe non orienté à n sommets, qui sont coloriés avec l'un des entiers $0, 1, \ldots, k-1$.

Tout d'abord, tout entier $n \leqslant 2k$ convient : en effet, il suffit de colorier les entiers de 1 à n en affectant à l'entier i la couleur $i \pmod k$, puis en ajoutant une arête entre chaque paire d'entiers adjacents. De même, l'entier $n = 3k$ convient : il suffit de colorier les entiers de 1 à n en affectant à l'entier i la couleur $i \pmod k$, puis en ajoutant une arête entre chaque paire d'entiers adjacents ainsi qu'entre les entiers 1 et n.

Réciproquement, soit $n \geqslant 2k+1$ une valeur convenable : nous allons démontrer que $n = 3k$. Tout d'abord, le principe des tiroirs indique qu'une couleur, disons 0, a été utilisée pour colorier au moins trois sommets du graphe. On considère alors un chemin $v_0 — v_1 — \ldots — v_k$ entre deux sommets de couleur 0. Les autres sommets v_i sont tous de couleurs différentes et, quitte à renuméroter les couleurs, on suppose donc que le sommet v_i a été colorié avec la couleur i.

Supposons maintenant qu'un des sommets v_i, avec $1 \leqslant i \leqslant k-1$, a un voisin w autre que v_{i-1} et v_{i+1}. Si w est un autre sommet v_j, passer directement de v_i à v_j nous permet d'aller directement de v_0 à v_k en moins de k étapes, ce qui est impossible. Sinon, soit j la couleur de w. Alors w est à distance au plus $1 + |j-i|$ de v_j, donc $|j-i| \geqslant k-1$. Puisque $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $0 \leqslant i \leqslant k-1$, cela signifie que $i = k-1$ et $j = 0$. Mais alors w est à distance au plus 2 de v_k, ce qui est impossible puisque $k \geqslant 3$.

On considère ensuite un chemin de longueur k entre v_k et un troisième sommet de couleur 0. Ce chemin ne peut coïncider avec le chemin $v_k — v_{k-1} — \ldots — v_0$. Par conséquent, il s'agit d'un nouveau chemin $v_k — v_{k+1} — \ldots — v_{2k}$, où les $2k+1$ sommets v_i sont deux à deux distincts. Puis, par une récurrence immédiate sur i, on constate que v_{2k-i} est de couleur $k-i$. De la même manière, il existe un chemin de longueur k entre v_{2k} et v_0, qui ne peut utiliser aucun des sommets $v_1, \ldots, v_{2k-1}$. On dispose donc en fait d'un cycle $v_0 — v_1 — \ldots — v_{3k-1} — v_0$, où chaque sommet v_i est de couleur i.

On a déjà mentionné que les seuls voisins de v_1 étaient v_0 et v_2. Mais alors, pour des raisons analogues, les seuls voisins de chaque sommet v_i sont $v_{i-1 \pmod{3k}}$ et $v_{i+1 \pmod{3k}}$. Notre cycle forme donc une composante connexe du graphe. Par ailleurs, tout sommet du graphe est à distance au plus k d'un des sommets du cycle : le graphe est donc connexe. Par conséquent, notre cycle contient l'ensemble des sommets du graphe, ce qui signifie que $n = 3k$.

§ Solution n°2

On propose ici une autre manière de conclure le problème dès lors que, comme dans la première solution, on a déjà montré que deux chemins de longueur k entre sommets distincts de même couleur ne peuvent avoir d'autre sommet commun que leurs extrémités. Ci-dessous, on qualifiera ces chemins de *k-chemins*.

Puisque l'on a trois sommets A, B et C de couleur 0, on peut les relier par des k-chemins deux à deux disjoints. Ce faisant, on construite déjà un $3k$-cycle, comme dans la solution n°1. On sait donc que $n \geqslant 3k$.

Supposons maintenant que $n \geqslant 3k+1$. Sans perte de généralité, il existe un quatrième sommet de couleur 0, que l'on notera D. Soit alors v_1, v_2, et v_3 les premiers sommets sur les k-chemins allant respectivement de A à B, de B à C et de B à D. Sur le chemin de A à B, chaque sommet, à part A et v_1, est à distance strictement plus petite que k de chacun des sommets v_2 et v_3. Par conséquent, ceux-ci sont tous deux de la couleur de v_1. Mais c'est là une contradiction, puisqu'il existe un chemin de longueur 2 entre ces deux sommets.

§ Solution n°3

On propose ici une approche légèrement différente de celle vue en fin de solution n°2 (et plus compliquée). Supposons qu'il existe quatre sommets A, B, C et D de couleur 0. Alors A est l'extrémité d'au moins trois k-chemins.

Ceux-ci n'ont aucun sommet commun en dehors de leurs extrémités, et chacun contient d sommets à distance au plus d de A, où l'on a posé $d = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$. On dispose donc de $3d+1$ sommets à distance au plus $2d \leqslant k-1$ les uns des autres. Il sont donc tous de couleurs différentes, de sorte que $(3k-4)/2 \leqslant 3d+1 \leqslant k$, c'est-à-dire $k \leqslant 4$.

Or si $k = 3$, on a en fait $d = 1$, donc $3d + 1 > k$. Il nous reste donc à traiter le cas où $k = 4$. Mais alors, au lieu d'inclure seulement d sommets sur le chemin de A vers B, on en inclut en fait $d + 1$. De la sorte, on aura $3d + 2 = 5$ sommets à distance au plus $2d + 1 = 3$ les uns des autres, ce qui est là encore impossible, concluant cette solution.

Problème 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Trouver, en fonction de n, le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que, parmi k nombres réels quelconques, il en existe nécessairement deux dont la différence, en valeur absolue, est soit strictement inférieure à $1/n$, soit strictement supérieure à n.

---

§ Solution

Nous allons démontrer que $k = n^2 + 2$. En effet, si $k \leqslant n^2 + 1$, considérons les k nombres réels $0, 1/n, 2/n, \ldots$, $(k-1)/n$. La distance minimale entre deux de ces nombres vaut $1/n$, et la distance maximale entre deux de ces nombres vaut $(k-1)/n$, donc inférieure ou égale à n.

Supposons maintenant que $k = n^2 + 2$. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ des nombres réels, triés dans l'ordre croissant, et soit s la plus petite différence possible entre deux de ces nombres. On montre par une récurrence immédiate que $x_\ell \geqslant x_0 + \ell s$ pour tout entier $\ell \leqslant k-1$. Par conséquent, soit $s < 1/n$, soit la différence $x_{k-1} - x_0 \geqslant (k-1)s > n^2 s$ est strictement supérieure à n.

Problème 4

Trouver tous les entiers x, y et z supérieurs ou égaux à 0 tels que

$$2^x + 9 \times 7^y = z^3.$$

---

§ Solution

L'énoncé indique que $2^x \equiv z^3 \pmod 9$. Or, on vérifie aisément que les seuls cubes modulo 9 sont -1, 0 et 1, et que $2^x \equiv \pm 1 \pmod 9$ si et seulement si $x \equiv 0 \pmod 3$.

Dans ces conditions, et en posant $t = x/3$, l'équation de l'énoncé se réécrit comme

$$9 \times 7^y = z^3 - 2^{3t} = (z - 2^t)(z^2 + 2^t z + 2^{2t}).$$

Posons alors $d = \mathrm{PGCD}(z - 2^t, z^2 + 2^t z + 2^{2t})$, puis $a = (z - 2^t)/d$ et $b = (z^2 + 2^t z + 2^{2t})/d$. On constate que

$$0 \equiv z^2 + 2^t z + 2^{2t} \equiv 3 \times 2^{2t} \pmod d,$$

et donc que d est premier avec 7.

En outre, puisque $bd - (ad)^2 = 3 \times 2^t z$, on sait que 3 divise soit ad et bd, soit aucun des deux. Puisque 9 divise abd^2 et que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, on en déduit que 3 divise d. Réciproquement, puisque d^2 est premier avec 7 et divise 9×7^y, on en conclut que $d = 3$.

L'égalité de l'énoncé se réécrit alors comme $7^y = ab$. Puisque a et b sont premiers entre eux, l'un est donc égal à 1, et l'autre à 7^y. Comme on a vu que $b > a^2 d$, c'est donc que $a = 1$ et $b = 7^y$.

Mais alors $z = 2^t + 3$ et $2^t z = (bd - (ad)^2)/3 = 7^y - 3$. Comme $7^y \equiv \pm 1 \pmod 8$, on en déduit que $2^t z \equiv -2$ ou $-4 \pmod 8$, donc que $t \leqslant 2$. On vérifie alors les trois valeurs possibles de t :

- ▷ si $t = 0$, nos deux égalités deviennent $z = 4$ et $4 = 7^y - 3$, de sorte que $y = 1$;
- ▷ si $t = 1$, nos deux égalités deviennent $z = 5$ et $10 = 7^y - 3$, ce qui n'est pas possible ;
- ▷ si $t = 2$, nos deux égalités deviennent $z = 7$ et $28 = 7^y - 3$, ce qui n'est pas possible non plus.

Par conséquent, la seule solution éventuelle est $(x, y, z) = (0, 1, 4)$, et on vérifie aisément qu'elle convient bien.