Olympiade Francophone de Mathématiques – Édition 2020

Épreuve Senior

Problème 1

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, et tel que $AB < AC$. On note D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit G le point de la droite (AB) tel que les droites (DG) et (EF) sont perpendiculaires. Enfin, soit X le point d'intersection, autre que A, entre les cercles circonscrits aux triangles ABC et AEF.

Démontrer que les points B, D, G et X appartiennent à un même cercle.

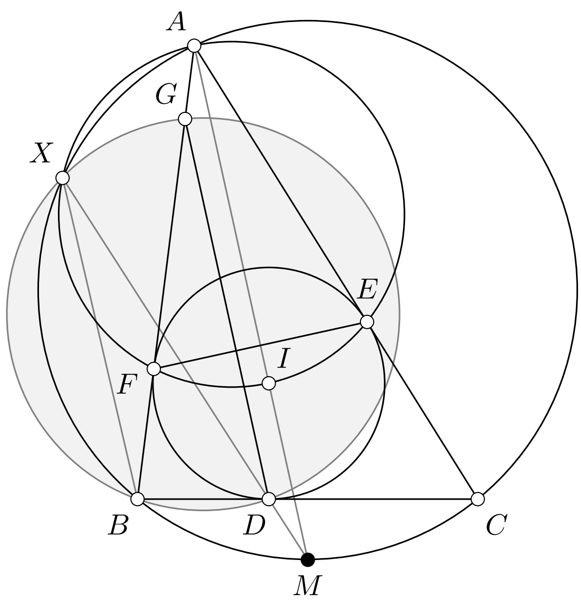
§ Solution n°1

Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC et Γ le cercle circonscrit à ABC. Puisque l'on souhaite montrer que $(GB, GD) = (XB, XD)$, c'est tout naturellement que l'on trace les droites (BX) et (DX). Il semble alors que les droites (AI) et (DX) se coupent en un point de Γ, qui sera donc le milieu de l'arc $\overline{BC}$, et que l'on notera M. Le fait que (DX) passe par M signifie que (DX) est la bissectrice de $\widehat{BXC}$, et on entreprend donc de le démontrer.

À cette fin, nous allons en fait démontrer que les triangles XFB et XEC sont semblables. Or, d'après le théorème de l'angle inscrit, on sait que $(CE, CX) = (CA, CX) = (BA, BX) = BF, BX)$ et que $(FX, FB) = (FX, FA) = (EX, EA) = (EX, EC)$. Par conséquent, nos deux triangles ont bien deux angles en commun, ce qui signifie qu'ils sont semblables.

On en déduit que $XB/XC = FB/EC = BD/CD$. D'après le théorème de la bissectrice, cela signifie que D est le pied de la bissectrice issue du sommet X dans le triangle BXC, c'est-à-dire que (DX) est bien la bissectrice de $\widehat{BXC}$.

Enfin, puisque (AI) et (DG) sont toutes deux perpendiculaires à (EF), elles sont parallèles. On en déduit que $(GB, GD) = (AB, AM) = (XB, XM) = (XB, XD)$, ce qui conclut.



§ Solution n°2

Soit H le point d'intersection des droites (DG) et (EF). D'après la loi des sinus dans les triangles DEH et DFH, on constate que

$$\begin{aligned}\frac{HE}{HF} &= \frac{\sin(\widehat{EDG})\sin(\widehat{DFE})}{\sin(\widehat{GDF})\sin(\widehat{FED})} = \frac{\sin(\widehat{AIC}+90^\circ)\sin(\widehat{BIA})}{\sin(\widehat{BIA}+90^\circ)\sin(\widehat{AIC})} \\ &= \frac{\tan(\widehat{BIA})}{\tan(\widehat{AIC})} = \frac{\tan(90^\circ+\gamma/2)}{\tan(90^\circ+\beta/2)} = \frac{\tan(\beta/2)}{\tan(\gamma/2)} = \frac{CD}{BD}.\end{aligned}$$

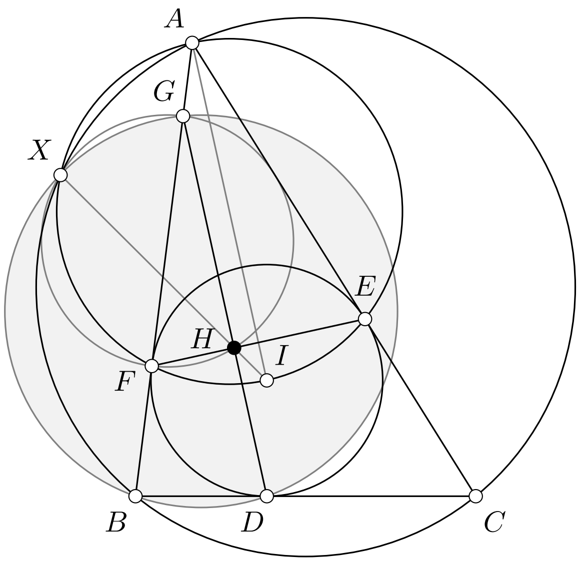
D'autre part, en procédant comme dans la solution n°1, on constate que les triangles XBF et XCE sont semblables, donc que $XE/XF = EC/FB = CD/BD = HE/HF$. D'après le théorème de la bissectrice, cela signifie que H est le pied de la bissectrice de X dans le triangle EFX.

Or, puisque $\widehat{AEI}$ et $\widehat{AFI}$ sont des angles droits, le cercle passant par A, E, F et X est en fait le cercle de diamètre $[AI]$, et I est le milieu de l'arc $\overline{EF}$. La droite (XI) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{EXF}$, ce qui signifie qu'elle contient le point H.

Mais alors $(GF, GH) = (AF, AI) = (XF, XI) = (XF, XH)$. Par conséquent, les points F, G, H et X sont cocycliques, et puisque l'angle $\widehat{FHG}$ est droit, ils appartiennent au cercle de diamètre $[FG]$. Mais alors

$$\begin{aligned}(XB, XG) &= (XB, XA) + (XA, XF) + (XF, XG) = (CB, CA) + (EA, EF) + 90^\circ \\ &= (DB, CA) + (CA, EF) + (EF, DG) = (DB, DG),\end{aligned}$$

ce qui signifie en effet que les points B, D, G et X sont cocycliques.



§ Solution n°3

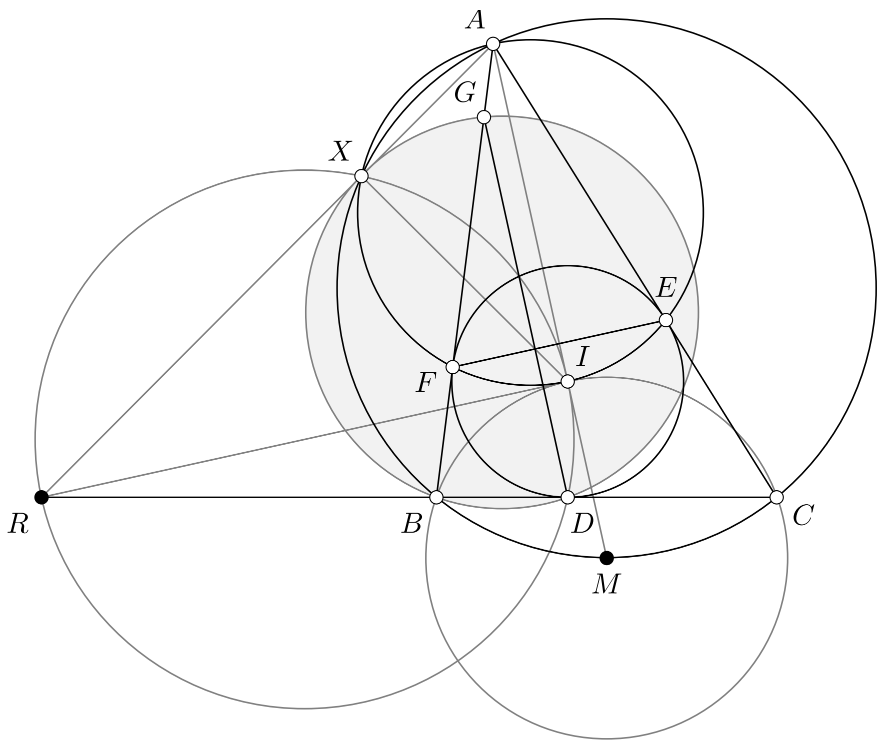
Soit M le milieu de l'arc $\overline{BC}$ sur le cercle Γ. Puisque $(MB, MI) = (MB, MA) = (CB, CA) = 2(CB, CI)$ et que, de manière analogue, $(MC, MI) = 2(BC, BI)$, on sait que M est le centre du cercle circonscrit à BCI.

Soit alors R le centre radical des trois cercles circonscrits à ABC, BCI et AEF : il s'agit du point de concours des droites (AX) et (BC). En outre, puisque $\widehat{AEI}$ et $\widehat{AFI}$ sont des angles droits, le cercle passant par A, E, F et X est en fait le cercle de diamètre $[AI]$. On en déduit d'une part que $(XR, XI) = (XA, XI) = 90° = (BC, DI) = (DR, DI)$, donc que les points D, I, R et X sont cocycliques ; et, d'autre part, que la droite (RI), en tant qu'axe radical des cercles circonscrits à AEF et à BCI, est perpendiculaire à (AI).

On en conclut que

$$\begin{aligned}(XB, XD) &= (XB, XA) + (XA, XI) + (XI, XD) = (CB, CA) + 90° + (RI, RD) \\ &= (CB, CA) + (AI, RI) + (RI, BC) = (AI, CB) + (AB, AI) = (GB, GD),\end{aligned}$$

ce qui signifie en effet que les points B, D, G et X sont cocycliques.



■ Problème 2

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite finie d'entiers naturels. Ses *sous-suites* sont les suites de la forme $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ telles que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Deux sous-suites sont égales si elles ont la même longueur et sont formées des mêmes termes ; autrement dit, les sous-suites $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ et $a_u, a_{u+1}, \ldots, a_v$ sont considérées comme égales si et seulement si $j - i = v - u$ et $a_{i+k} = a_{u+k}$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant j - i$. Enfin, on dit qu'une sous-suite $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ est *palindromique* si elle se lit de la même façon dans les deux sens, c'est-à-dire si $a_{i+k} = a_{j-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant j - i$.

Quel est le plus grand nombre de sous-suites palindromiques distinctes que peut contenir une telle suite de longueur n ?

---

§ Solution

Tout d'abord, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, toutes les sous-suites formées de k termes nuls consécutifs sont bien des sous-suites palindromiques, et ce quel que soit l'entier $k \leqslant n$. Une suite de longueur n peut donc contenir n sous-suites palindromiques distinctes.

Réciproquement, démontrons qu'elle ne peut pas contenir plus de n sous-suites distinctes. Pour ce faire, étant donnée une sous-suite palindromique $\mathbf{a} = a_i, \ldots, a_j$, on appelle *origine de* $\mathbf{a}$ le plus grand entier s tel que $\mathbf{a}$ coïncide avec la sous-suite $a_s, \ldots, a_{s+j-i}$.

On démontre alors que tout entier est l'origine d'au plus une sous-suite palindromique. En effet, si s est l'origine de deux sous-suites palindromiques $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ de longueurs respectives $\ell < \ell'$, posons $s' = s + \ell' - \ell$. Alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, on constate que

$$a_{s'+k} = a_{s+\ell'-\ell+k} = a_{s+\ell-k} = a_{s+k}.$$

Cela signifie que la suite $a_{s'}, \ldots, a_{s'+\ell}$ coïncide avec la suite $\mathbf{a}'$, ce qui contredit le fait que s soit l'origine de $\mathbf{a}'$. Par conséquent, la suite $a_1, \ldots, a_n$ contient au plus n sous-suites palindromiques.

■ Problème 3

On définit une suite de réels $a_1, a_2, a_3, \ldots$ par $a_1 = 3/2$, puis

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Trouver un entier $k \geqslant 1$ tel que $2020 \leqslant a_k < 2021$.

---

§ Solution

On va démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété P_n suivante :

$$\sqrt{n} < a_n < \sqrt{n} + 1.$$

Tout d'abord, puisque $a_1 = 3/2$, on constate bien que P_1 est vraie. Puis, si $n \geqslant 1$ est un entier tel que P_n est vraie, alors

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} < a_{n+1} < \sqrt{n} + 1 < \sqrt{n+1} + 1.$$

Ainsi, on déduit P_{n+1} du fait que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} &= 1 + \frac{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)+1}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \\ &= \sqrt{n + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}} \geqslant \sqrt{n + \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}} = \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

On en conclut en particulier que $2020 < a_{2020^2} < 2021$: il suffit donc de choisir $k = 2020^2$.

§ Remarque

En calculant les premiers termes de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$, on pourra être amené à formuler la conjecture (correcte) selon laquelle cette suite est strictement croissante. Il est alors aisé de démontrer que cette conjecture est en fait équivalente au fait que $v_{n-1} < a_n < v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où l'on a posé $v_n = \sqrt{n+1/4}+1/2$. Enfin, on peut montrer ce double encadrement avec une preuve similaire à celle présentée ci-dessus, quoi que *beaucoup* plus technique. Par conséquent, les entiers k convenables sont ceux tels que $4078381 \leqslant k \leqslant 4082420$.

■ Problème 4

On note $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, et soit m un entier. On suppose que, pour tout sous-ensemble S fini et non vide de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Démontrer que, parmi les entiers $a_1, a_2, a_3, \ldots$, seul un nombre fini compte moins de m facteurs premiers distincts.

Remarque : la notation $\prod\limits_{k \in S} a_k$ désigne le produit de tous les entiers a_k pour lesquels $k \in S$.

---

§ Solution n°1

Soit p et q deux nombres premiers distincts. Supposons que, parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, il y en ait au moins $\varphi(pq)^2 - \varphi(pq) + 1$ qui ne soient divisibles ni par p, ni par q, où φ désigne l'indicatrice d'Euler. Ils peuvent prendre $\varphi(pq)$ valeurs possibles modulo pq, et le principe des tiroirs indique donc que $\varphi(pq)$ de ces entiers sont congrus au même entier ℓ inversible modulo pq. Quitte à réordonner les entiers a_i, on suppose qu'il s'agit de $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(pq)}$.

Le théorème d'Euler-Fermat indique alors que

$$-1 + \prod_{k=1}^{\varphi(pq)} a_k \equiv \ell^{\varphi(pq)} - 1 \equiv 0 \pmod{pq},$$

en contradiction avec le fait que $-1 + \prod_{k=1}^{\varphi(pq)} a_k$ est un nombre premier. On en conclut qu'au plus $\varphi(pq)^2 - \varphi(pq)$ ne sont divisibles ni par p, ni par q.

Soit maintenant $p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ des nombres premiers deux à deux distincts. Pour tout entier $k \leqslant N$, l'ensemble

$$E_k = \{i \geqslant 0 \colon a_i \text{ n'est divisible ni par } p_{2k-1} \text{ ni par } p_{2k}\}$$

est nécessairement fini. La réunion $\mathcal{E} = E_1 \cup \ldots \cup E_N$ est donc elle-même un ensemble fini. Enfin, pour tout entier i n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, l'entier a_i compte au moins N nombres premiers parmi $p_1, \ldots, p_{2N}$. Ceci conclut.

§ Solution n°2

On commence par démontrer que $a_i \neq a_j$ pour tous les indices i et j distincts. En effet, si $a_i = a_j$, alors $a_i - 1$ est un nombre premier qui divise strictement $a_i a_j - 1 = a_i^2 - 1 = (a_i - 1)(a_i + 1)$, et ce dernier nombre n'est donc pas premier.

Soit maintenant p un nombre premier impair. Supposons que, parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, il y en ait au moins $p^2 - 3p + 3 = (p-1)(p-2) + 1$ qui ne soient pas divisibles par p. Ils peuvent prendre $p - 1$ valeurs possibles modulo p, et le principe des tiroirs indique donc que $p - 1$ de ces entiers sont congrus au même entier ℓ inversible modulo p. Quitte à réordonner les entiers a_i, on suppose qu'il s'agit de $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, et que $a_1 < a_2$. Soit également N l'entier $-1 + \prod\limits_{k=1}^{p-1} a_k$.

Le petit théorème de Fermat indique alors que $N \equiv \ell^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Or, puisque $a_1 \equiv a_2 \equiv \ell \pmod{p}$ et que $a_1 < a_2$, on sait que $a_2 \geqslant p + a_1 > p + (a_1 - 1) \geqslant p + 2$. On en déduit que $N \geqslant a_2 - 1 > p$ et que, puisque N est divisible par p, il n'est pas premier. Cette contradiction nous assure que l'ensemble

$$E_p = \{i \geqslant 0 \colon a_i \text{ n'est pas divisible par } p\}$$

est nécessairement fini.

Enfin, soit $p_1, p_2, \ldots, p_N$ des nombres premiers impairs deux à deux distincts. La réunion $\mathcal{E} = E_{p_1} \cup \ldots \cup E_{p_N}$ est elle-même un ensemble fini. Or, pour tout entier i n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, l'entier a_i est divisible par les N nombres premiers parmi $p_1, \ldots, p_N$. Ceci conclut.

§ Solution n°3

On propose ici une autre manière de montrer que E_p est fini. En procédant comme dans les solutions précédentes, on suppose que les $p-1$ entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ sont congrus au même entier ℓ inversible modulo p. Comme précédemment, et en vertu du petit théorème de Fermat, on sait que p divise l'entier $N = -1 + \prod_{k=1}^{p-1} a_k$.

Cependant, puisque $a_k - 1 \geqslant 2$ pour tout k, on sait également que $N \geqslant 3^{p-1} - 1$. Or, en développant le produit $(1+2)^{p-1}$ grâce au binôme de Newton, on constate que $3^{p-1} \geqslant 1 + (p-1)2^{p-2}$. Si $p \geqslant 2$, on en déduit que $N \geqslant (p-1)2^{p-2} \geqslant 2(p-1) > p$. Puisque N est divisible par p, il n'est donc pas pas premier, ce qui est absurde.

§ Solution n°4

On propose ici une troisième manière de montrer que E_p est fini. Supposons que, parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, il y en ait au moins $(2p-3)(p-1)+1$ qui ne soient pas divisibles par p. Le principe des tiroirs indique que $2p-2$ d'entre eux sont congrus au même entier ℓ inversible modulo p et, sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{2(p-1)}$. Comme précédemment, et en vertu du petit théorème de Fermat, on sait que p divise chacun des entiers $M = -1 + \prod_{k=1}^{p-1} a_k$ et $N = -1 + \prod_{k=1}^{2(p-1)} a_k$. Puisque $a_k \geqslant 3$ pour tout k, ces deux entiers sont distincts, et l'un d'entre eux est donc composé, ce qui est absurde.