Olympiade Francophone de Mathématiques

Deuxième édition

Épreuve Junior

Solutions

1. On considère les nombres R et S définis par

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{223}{224} \quad \text{et} \quad S = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{224}{225}.$$

Montrer que

$$R < \frac{1}{15} < S.$$

Solutions

Première solution On commence par calculer le produit $R \times S$. Après simplifications, on obtient

$$R \times S = \frac{1}{225} = \frac{1}{15^2}.$$

La moyenne géométrique des nombres R et S est donc $1/15$. Il suffit de montrer que $R < S$ pour conclure, car la moyenne géométrique de deux nombres distincts est toujours strictement comprise entre ces deux nombres.

Observer que

$$\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2} \tag{1}$$

pour tout entier $a \geqslant 1$. En effet,

$$\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2} \iff (a+1)^2 - a(a+2) > 0$$

et $(a+1)^2 - a(a+2) = 1$. Donc, avec $a = 2n$,

$$R = \prod_{n=0}^{111} \frac{2n+1}{2n+2} < \prod_{n=0}^{111} \frac{2n+2}{2n+3} = S.$$

Remarque 1. *Les puristes peuvent aussi montrer l'inégalité* (1) *avec l'observation suivante*

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} < 1 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+1}{a+2}.$$

Deuxième solution Soit $n = 112$. En multipliant le numérateur et le dénominateur de R et S par $2 \times 4 \times \cdots \times 2n$, on obtient

$$R = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad S = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{2n+1}\binom{2n}{n}^{-1}$$

En utilisant $2n+1 = 15^2$, alors on remarque que les deux inégalités $R < 1/15$ et $1/15 < S$ sont équivalentes à :

$$\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{15}.$$

On a donc réduit le problème à une estimation du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

L'inégalité suivante est vraie pour tout $n \geqslant 1$

$$\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}} \tag{2}$$

Cette borne est un résultat d'Erdös. On peut facilement reconstruire sa preuve par induction. En effet, $4 > 2\sqrt{3}$, ce qui donne le cas $n = 1$. Observer que

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}\binom{2n}{n}.$$

Donc, en supposant que $\binom{2n}{n} < 4^n/\sqrt{2n+1}$, on obtient

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < \frac{4^n \cdot 2\sqrt{2n+1}}{(n+1)} = \frac{4^{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2(n+1)}$$

En appliquant AM-GM ou en développant, on obtient finalement

$$\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2(n+1)} < 1.$$

Cela termine la preuve de (2) par induction. Comme dans le cas présent $2n + 1 = 15^2$, cela termine la preuve.

Remarque 2. *Il existe une meilleure approximation que la borne* (2) *:*

$$\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

pour tout $n \geqslant 1$. Et même de manière plus générale[1]

$$\binom{mn}{pn} < (2\pi n)^{-1/2} \frac{m^{mn+1/2}}{(m-p)^{(m-p)n+1/2} p^{pn+1/2}}.$$

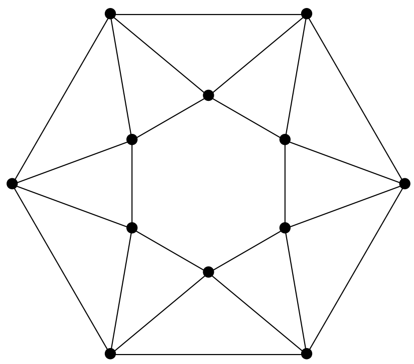
Variante de la deuxième solution On peut généraliser l'énoncé en remplançant 15 par $\sqrt{2n+1}$ et

$$R = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}.$$

On peut ensuite montrer par induction que $R < 1/\sqrt{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le cas $n = 1$ est clair et le pas d'induction similaire à la preuve du résultat d'Erdös ci-dessus. De même pour S.

1. `https://www.researchgate.net/publication/240023027_GOOD_LOWER_AND_UPPER_BOUNDS_ON_BINOMIAL_COEFFICIENTS`

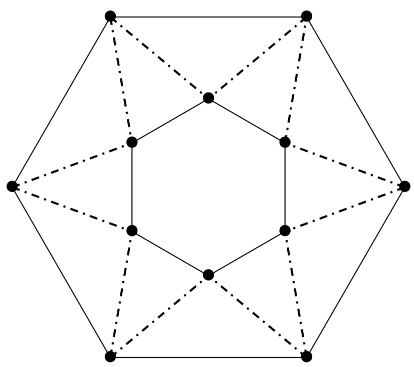
2. Évariste a dessiné douze triangles de manière circulaire de sorte que deux triangles consécutifs aient un côté en commun.



Sophie décide de colorier les côtés de ces triangles en bleu, rouge ou vert. Parmi les 3^{24} manières qu'a Sophie de colorier les côtés des triangles, combien satisfont la propriété que chacun des douze triangles ait un coté bleu, un coté rouge et un côté vert ?

Solution

Réponse : Sophie a 4098 manières de colorier les côtés des triangles.



Première solution : L'idée est de considérer le zigzag formé par les arêtes connectant l'hexagone intérieur et l'hexagone extérieur. La condition implique que deux arêtes consécutives dans ce zigzag doivent avoir une couleur différente, et inversement, puisque les arêtes des deux hexagones appartiennent chacune à un seul triangle dont les deux autres côtés font partie du zigzag, une fois que l'on a colorié ce zigzag de telle manière que deux arêtes consécutives aient une couleur différente, il existe une unique manière de colorier les arêtes restantes de manière à respecter la condition.

Numérotons donc les arêtes du zigzag $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, dans le sens des aiguilles d'une montre. Le problème est équivalent à compter de combien de manières différentes on peut colorier $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ avec une de trois couleurs différentes de telle manière que a_i et a_{i+1} (y compris a_{12} et a_1) aient toujours une couleur différente. Une telle coloration est dite *admissible.* L'arête a_1 peut être colorié avec n'importe laquelle des trois couleurs, donc il y a 3 possibilités pour a_1.

Par symétrie, on va considérer par la suite que a_1 est colorié en rouge pour simplifier l'argument. On introduit ensuite les deux quantités A_i et B_i, la première étant définie comme le nombre de colorations admissibles des arêtes $a_1, a_2, \ldots a_i$ dans lesquelles l'arête a_i est coloriée en rouge, et la deuxième comme le nombre de telles colorations dans lesquelles l'arête a_i n'est pas coloriée en rouge. La réponse au problème est alors le nombre

$$3 \cdot B_{12}$$

(puisque a_{12} ne peut pas être coloriée en rouge, et on a supposé arbitrairement que a_1 était rouge mais le même argument fonctionne en remplaçant rouge par vert ou par bleu).

On constate maintenant que si a_i est rouge, il existe deux options pour que a_{i+1} ne soit pas coloriée en rouge et aucune option pour que a_{i+1} soit coloriée en rouge ; si au contraire a_i n'est pas rouge, il existe une option pour que a_{i+1} soit coloriée en rouge et une option pour que a_{i+1} ne soit pas coloriée en rouge. Autrement dit on a les relations de récurrence

$$\begin{cases} A_{i+1} = B_i, \\ B_{i+1} = 2 \cdot A_i + B_i. \end{cases}$$

En commençant avec les valeurs $A_2 = 0$ et $B_2 = 2$, on trouve par application successive des relations ci-dessus que A_i et B_i prennent les valeurs suivantes :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_n	0	2	2	6	10	22	42	86	170	342	682
B_n	2	2	6	10	22	42	86	170	342	682	1366

En particulier $B_{12} = 1366$, et donc le nombre total de colorations possibles est $3 \cdot B_{12} = 4098$.

Deuxième solution Comme dans la première solution on constate qu'il suffit de considérer le zigzag. On appelle un sommet de ce zigzag *monochrome* si les deux arêtes adjacentes ont la même couleur, et soit E_i l'ensemble des colorations du zigzag pour lesquelles le sommet numéro i est monochrome. Le nombre recherché est la cardinalité du complément à $E_1 \cup \ldots \cup E_{12}$ et par le principe d'inclusion-exclusion cette cardinalité peut se calculer en fonction de la cardinalité des ensembles $E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}$. Plus précisément nous avons que le nombre recherché est

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,12\}} (-1)^{|I|} | \cap_{i \in I} E_i|$$

On peut montrer que $|E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}|$ dépend uniquement de k, et vaut 3^{12-k} si $k < 12$ et 3 si $k = 12$ (car chaque sommet monochrome détermine la couleur d'une de ses arêtes en fonction de l'autre, et si 11 sommets sont monochromes, alors le dernier sommet est également monochrome). Autrement dit le nombre recherché vaut

$$3 + \sum_{k=0}^{11} \binom{12}{k} (-1)^k 3^{12-k} = 3 + (3-1)^1 2 - 1 = 2^{12} + 2.$$

3. On a colorié tous les points du plan Euclidien en rouge ou en bleu. Montrer qu'au moins l'un des deux énoncés suivants est vrai :

- Il existe deux points rouges à une distance 1 l'un de l'autre.
- Il existe quatre points bleus B_1, B_2, B_3, B_4 tels que la distance de B_i à B_j est égale à $|i-j|$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant 4$.

Solution

Si tous les points du plan sont bleus, alors le deuxième énoncé est vérifié. Supposons que l'on ait au moins un point rouge que l'on appelle R.

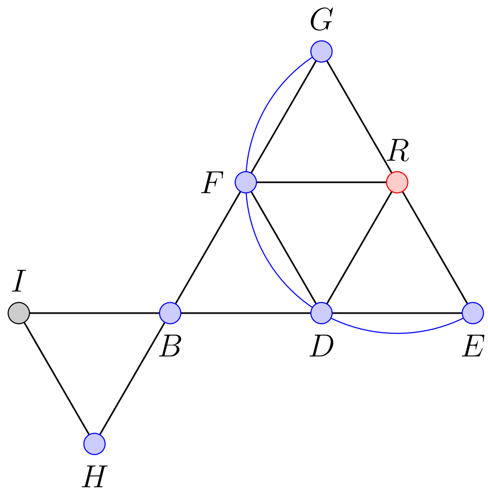
On considère le cercle γ de centre R et de rayon 1. Si un point de ce cercle est rouge, alors la première condition est vérifiée. Supposons que tous les points du cercle soient bleus.

On considère le cercle Γ de centre R et de rayon $\sqrt{3}$, qui est la longueur d'une hauteur dans un triangle équilatéral de côté 2. Il existe deux points sur Γ qui sont à distance 1. Donc, si tous les points de Γ sont rouges, alors la première condition est satisfaite. Supposons qu'un point B_2 de Γ soit bleu.

On considère le triangle équilatéral tel que B soit un sommet et R le milieu du côté opposé. Les deux autres sommets du triangle sont G et E. Les milieux des côtés $[BG]$ et $[BE]$ sont F et D, respectivement. Les points G, F, D, E se trouvent sur γ et sont donc bleus par hypothèse.

Pour terminer, on considère H et I les symétriques de F et D par rapport à B, respectivement. Le triangle BHI est équilatéral de côté 1. Si H et I sont rouges, alors la première condition est satisfaites. Sinon, l'un des deux est bleu, disons H. Alors. les points H, B, F, G satisfont la deuxième condition.

Dans tous les cas, une des deux conditions est satisfaites et on a terminé.



4. On note $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ telles que, pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{PGCD}(f(m), n) + \mathrm{PPCM}(m, f(n)) = \mathrm{PGCD}(m, f(n)) + \mathrm{PPCM}(f(m), n). \tag{3}$$

Solutions

Réponse : La seule solution est la fonction identité $f(n) = n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Première solution En effet, soit f une solution du problème. En posant $m = f(n)$ dans (3), on a

$$\mathrm{PGCD}(f(f(n)), n) = \mathrm{PPCM}(n, f(f(n))) \tag{4}$$

et donc

$$f(f(n)) = n$$

pour tous $n \geqslant 1$.

De plus, en posant $n = 1$ dans (3), on obtient directement

$$1 + \mathrm{PPCM}(m, f(1)) = \mathrm{PGCD}(m, f(1)) + f(m) \tag{5}$$

pour tous $m \geqslant 1$. Soit $a > 1$ tel que $\mathrm{PGCD}(a, f(1)) = 1$ (un tel a existe toujours – on peut par exemple considérer un nombre premier plus grand que $f(1)$). Avec $m = a$ dans (5), on peut conclure directement que $f(a) = f(1)a$. De plus, en posant $m = af(1)$ dans (5), on a

$$1 + af(1) = f(1) + f(af(1)) = f(1) + f(f(a)) = f(1) + a.$$

Ainsi, $(a-1)(f(1)-1) = 0$, donc

$$f(1) = 1$$

car on a supposé $a > 1$.

En utilisant $f(1) = 1$ dans (5), on obtient directement que $f(n) = n$ pour tous $n \geqslant 1$.

On vérifie facilement que la fonction identité est en effet une solution du problème originale.

Deuxième solution On peut également résoudre l'équation fonctionnelle de la manière suivante. En substituant $m = p$, $n = 1$ avec p un nombre premier, on obtient

$$\mathrm{PGCD}(f(p), 1) + \mathrm{PPCM}(p, f(1)) = \mathrm{PGCD}(p, f(1)) + \mathrm{PPCM}(f(p), 1).$$

On distingue ici deux cas, selon si $f(1)$ est divisible par p ou non.

- Si p divise $f(1)$ alors l'équation devient $1 + f(1) = p + f(p)$ et donc $f(p) = f(1) - p + 1$.
- Si p ne divise pas $f(1)$ alors on obtient $1 + pf(1) = 1 + f(p)$ et donc $f(p) = pf(1)$.

On voudra en fait prouver que $f(1) = 1$, mais supposons pour le moment qu'il existe un nombre premier p qui divise $f(1)$ et soit $f(1) < q$ un nombre premier. En substituant $m = p$ et $n = q$ l'équation devient

$$\mathrm{PGCD}(f(1) - p + 1, q) + \mathrm{PPCM}(p, qf(1)) = \mathrm{PGCD}(p, qf(1)) + \mathrm{PPCM}(f(1) - p + 1, q).$$

Puisque p divise $f(1)$ mais $q > f(1)$ (et donc ne divise ni $f(1)$ ni $f(1) - p + 1$), l'équation devient

$$1 + qf(1) = p + q(f(1) - p + 1)$$

et en réarrangeant les termes on obtient $(p-1)(q-1)=0$, ce qui est impossible puisque p et q sont deux nombres premiers, et donc en particulier sont tous les deux strictement plus grands que 1. On en déduit qu'il n'existe aucun nombre premier p qui divise $f(1)$, autrement dit $f(1)=1$.

On termine l'exercice en substituant $n=1$ et on obtient

$$\mathrm{PGCD}(f(m),1)+\mathrm{PPCM}(m,1)=\mathrm{PGCD}(m,1)+\mathrm{PPCM}(f(m),1)$$

pour tout $m \geqslant 1$, et cette dernière équation est équivalente à $f(m)=m$.
On vérifie facilement, comme dans la solution précédente, que la fonction identité est en effet une solution du problème originale.