Olympiade Francophone de Mathématiques

Deuxième édition

Épreuve Senior

Solutions

1. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ deux suites de nombres entiers strictement positifs telles que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que a_n divise b_n pour une infinité d'entiers $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un nombre entier c tel que $b_n = ca_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Solutions

Première solution On introduit la suite $c_n := b_n/a_n$ pour $n \geqslant 1$. La condition de la donnée implique que la suite c_n est entière pour une infinité de n. On veut montrer que la suite c_n est en fait constante (cette constante est nécessairement entière par hypothèse).

Un rapide calcul donne

$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n = a_{n+1}c_{n+1} + a_n c_n,$$

mais aussi

$$b_{n+2} = a_{n+2}c_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)c_{n+2}.$$

Donc

$$a_{n+1}(c_{n+2} - c_{n+1}) + a_n(c_{n+2} - c_n) = 0 \qquad (1)$$

pour tout $n \geqslant 1$. Comme la suite a_n est strictement positive, si $c_{n+2} = c_{n+1}$, alors $c_n = c_{n+2} = c_{n+1}$. De même, si $c_{n+1} = c_n$, alors $c_{n+2} = c_{n+1}$, car $a_{n+1} + a_n > 0$. Autrement dit,

$$c_{n+2} = c_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{n+1} = c_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Cela veut dire que la suite c_n est constante si et seulement si deux termes consécutifs sont égaux.
Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que chaque deux éléments consécutifs sont distincts. Si $c_{n+1} \neq c_{n+2}$, alors par (1) on déduit que $(c_{n+2} - c_{n+1})$ et $(c_{n+2} - c_n)$ sont des nombres non-nuls de signes opposés. Autrement dit,

$$c_{n+2} \in \big(\min\{c_{n+1}, c_n\}, \max\{c_{n+1}, c_n\}\big). \qquad (2)$$

C'est-à-dire, chaque élément de la suite est strictement compris entre les deux précédent.
Il existe donc seulement deux cas possibles :

- soit la suite c_n est constante (ce que l'on veut prouver), ou alors
- c_{n+2} se trouve strictement entre c_{n+1} et c_n pour tout $n \geqslant 1$.

Supposons que nous soyons dans le deuxième cas. En particulier, tous les éléments de la suite sont distincts. De plus, les intervalles que l'on obtient dans (2) sont imbriqués :

$$c_n \in \big(\min\{c_{n-1}, c_{n-2}\}, \max\{c_{n-1}, c_{n-2}\}\big) \subset \ldots \subset \big(\min\{c_2, c_1\}, \max\{c_2, c_1\}\big).$$

Ainsi, la suite c_n est *bornée*. Elle ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs entières et comme tous les éléments de la suite c_n sont supposés distincts, on obtient une contradiction.

Variante de la première solution À la place de (1), on peut également obtenir, pour tout $n \geqslant 1$:

$$c_{n+2} - c_{n+1} = -\frac{a_n}{2a_n + a_{n-1}}(c_{n+1} - c_n). \tag{3}$$

Cette relation met immédiatement en évidence la dichotomie de la première solution. De plus, elle implique

$$|c_{n+2} - c_{n+1}| < 1/2\,|c_{n+1} - c_n|\,, \tag{4}$$

car $a_{n-1} > 0$. On voit ainsi que la suite

$$c_n = c_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k - c_{k-1}$$

est *bornée*, car la série des 2^{-k} est convergente. On termine la preuve comme dans la solution précédente.

Deuxième solution On peut calculer le terme général des suites a_n et b_n de la manière suivante. Il existe des nombres $x(a), y(a), x(b), y(b)$ tels que pour tout $n \geqslant 1$

$$a_n = x(a)\varphi^{n-1} + y(a)\psi^{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = x(b)\varphi^{n-1} + y(b)\psi^{n-1},$$

où $\varphi > 1$, le nombre d'or, et $\psi = -\varphi^{-1}$ sont les zéros du polynôme $x^2 - x - 1$. De plus, les valeurs de base de la suite donnent

$$x(a) = \frac{a_1 + \varphi a_2}{1 + \varphi^2} \quad \text{et} \quad x(b) = \frac{b_1 + \varphi b_2}{1 + \varphi^2}.$$

On remarque que la suite $c_n = b_n/a_n$ converge vers $x(b)/x(a)$. Comme la suite c_n est entière pour une infinité de valeurs de n, sa limite est un nombre entier. Il existe donc un entier c tel que

$$\frac{x(b)}{x(a)} = \frac{\varphi b_2 + b_1}{\varphi a_2 + a_1} = c.$$

Donc

$$\varphi(b_2 - ca_2) = ca_1 - b_1.$$

et comme φ est irrationnel, on doit avoir $b_2 = ca_2$ et $b_1 = ca_1$. Par définition des suites a_n et b_n, on obtient directement que $b_n = ca_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Variante de la deuxième solution Il est possible d'écrire

$$a_{n+2} = F_{n+1}a_2 + F_n a_1 \quad \text{et} \quad b_{n+2} = F_{n+1}b_2 + F_n b_1,$$

où F_n est la suite de Fibonacci (définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_2 = F_1 = 1$). On peut alors obtenir que

$$F_{n+1}(c_{n+2}a_2 - b_2) = F_n(b_1 - c_{n+2}a_1).$$

En comparant les signes des deux côtés, on voit que la suite c_n est bornée. Comme $F_1 = 1$, les termes F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux. Donc,

$$F_{n+1} \mid b_1 - c_{n+2}a_1, \quad .$$

Comme F_n diverge et c_n est bornée, alors on doit avoir $c_{n+2} = b_1/a_1$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut conclure que la suite c_n est en fait constante et on a terminé.

2. Albert et Béatrice jouent à un jeu. On a posé 2021 cailloux sur une table. En alternance et en commençant par Albert, ils vont retirer un certain nombre de cailloux de la table en respectant la règle suivante. Au tour $n \geqslant 1$, le joueur dont c'est le tour, c'est-à-dire Albert si n est impair et Béatrice si n est pair, peut retirer un nombre de cailloux entre 1 et n. Au premier tour, Albert doit donc retirer 1 caillou ; au deuxième tour, Béatrice peut retirer 1 ou 2 cailloux ; au troisième tour, Albert peut en retirer 1, 2 ou 3, et ainsi de suite. Celui qui retire le dernier caillou de la table perd la partie. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie pour gagner à coup sûr.

Solution

Réponse : Béatrice a une stratégie gagnante.

Première solution On commence par étudier le jeu lorsque le nombre initial de cailloux est compris entre 1 et 10. On constate que parmi ces valeurs Béatrice a une stratégie gagnante lorsque le nombre initial de cailloux vaut $1, 3, 4, 7, 8$ ou 9, et qu'autrement c'est Albert qui a une stratégie gagnante. À partir de ces valeurs on peut formuler l'hypothèse que Béatrice gagne si le nombre initial de cailloux est compris entre $n^2 + n + 1$ et $(n + 1)^2$ pour un certain entier n, et autrement Albert gagne. Puisque $44^2 + 44 + 1 < 2021 < 45^2$ cela signifierait alors que Béatrice a une stratégie gagnante dans le jeu qui nous intéresse. Il reste à déterminer quelle est cette stratégie.

Puisque, d'après les règles du jeu, au tour $2r - 1$ Albert enlève un nombre de cailloux compris entre 1 et $2r - 1$ et au tour $2r$ Béatrice peut enlever un nombre de cailloux compris entre 1 et $2r$, en utilisant une stratégie de complément Béatrice peut faire en sorte que le nombre de cailloux enlevés pendant les deux tours $2r - 1$ et $2r$ soit exactement $2r$ ou $2r + 1$.

Ainsi, en appliquant le complément à $2r + 1$ aux tours $2r$ avec $1 \leqslant r \leqslant 40$, Béatrice s'assure que

$$\sum_{r=1}^{40} 2r + 1 = 40 \cdot 41 + 40 = 1680$$

cailloux sont retirés de la table. Ensuite, en appliquant le complément à $2r$ aux tours $2r$ avec $41 \leqslant r \leqslant 44$, Béatrice s'assure que

$$2 \cdot (41 + 42 + 43 + 44) = 340$$

cailloux supplémentaires sont retirés de la table. Donc, Béatrice s'assure ainsi que, à la fin du tour 88, il reste $2021 - 1680 - 340 = 1$ caillou sur la table. Finalement, Albert, qui doit jouer au tour 89, perd la partie.

Variante : Puisque les coups disponibles dépendent du tour, une stratégie devra prendre en compte non seulement le nombre de cailloux restants, mais également le numéro du tour dans lequel on se trouve. On appelle un *état* une paire (m, n), dans laquelle m désigne le nombre de cailloux restants et n le numéro du tour.

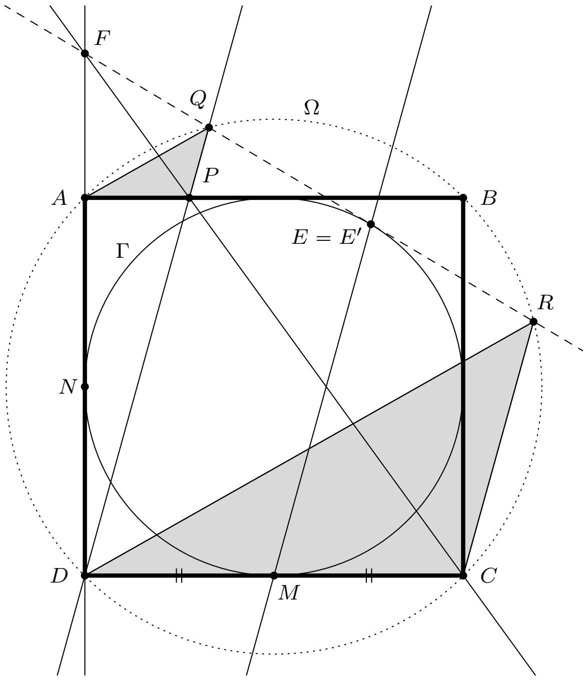
On appelle un état *gagnant* si un joueur commençant dans cet état a une stratégie gagnante, et autrement on l'appelle *perdant*. Clairement pour tout n l'état $(1, n)$ est perdant. Par conséquent tous les états $(2, n), \ldots, (n + 1, n)$ sont gagnants puisqu'il est possible de placer l'adversaire au tour suivant dans l'état $(1, n + 1)$, qui est perdant. Par contre les états $(n + 2, n)$ et $(n + 3, n)$ sont de nouveau perdants. En poursuivant la même analyse, on peut par exemple prouver par induction que les états $(k^2+(t+1)k, t)$ sont perdants pour tous t, k.

Les deux états $(2016, 5)$ et $(2009, 7)$ sont de cette forme (pour respectivement $k = 42$ et $k = 41$), et une rapide analyse des premiers coups montre que Béatrice peut forcer Albert à se retrouver dans l'un de ces deux états.

3. Soit $ABCD$ un carré et Γ son cercle inscrit. Soit M le milieu du segment $[CD]$. Soit P un point sur le segment $[AB]$ différent de B. La droite parallèle à la droite (DP) passant par M coupe Γ une deuxième fois en E. Les droites (CP) et (AD) se coupent en F. Montrer que la droite (EF) est tangente au cercle Γ.

Solutions

Première solution Supposons que DP coupe le cercle Ω circonscrit à $ABCD$ en Q, et soit R le point de Ω tel que $AQRD$ est un trapèze (isocèle) avec $AQ \parallel DR$. Par construction, $|QR| = |AD| = |CD|$, d'où le quadrilatère cyclique $CDQR$ est aussi un trapèze isocèle. D'où $AP \parallel DC$, $AQ \parallel DR$, $PQ \parallel CR$, et ainsi les triangles APQ et DCR ont leurs côtés deux à deux parallèles, et ainsi ils sont en perspective centrale par le théorème de Desargues. En particular, le point d'intersection F de CP et AD est sur QR.
Les cercles Γ and Ω sont concentriques, et la corde $[CD]$ de Ω est tangente à Γ en son milieu M. Comme $|QR| = |CD|$, il suit que $[QR]$ est tangent à Γ en son milieu, E'. Mais $CDQR$ est un trapèze isocèle, d'où $ME' \parallel DP$, et ainsi $E = E'$.



Deuxième solution Prenons des coordonnées cartésiennes telles que $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$, $D(-1,-1)$, et $E(\cos\theta, \sin\theta)$. Le milieu M de $[CD]$, P, et F ont respectivement les coordonnées $M(0,-1)$, $P(p,1)$, $F(-1,f)$. Utilisant $EM \parallel DP$ et l'alignment de F, P, C,

$$p = \frac{2\cos\theta - \sin\theta - 1}{1+\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{3+p}{1-p} = \frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}.$$

(Le dénominateur de l'expression pour f ne s'annule pas puisque $P \neq B$.) Soit $N(-1,0)$ le milieu de $[AD]$, point où AF est tangent à Γ. Mais EF est tangente à Γ si et seulement si $|EF| = |FN|$, c'est-à-dire

$$f^2 = (1+\cos\theta)^2 + (f-\sin\theta)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad f = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta},$$

où $\sin\theta \neq 0$ car ceci impliquerait que E est le milieu de $[BC]$ et ainsi $P = B$. Le problème est ainsi réduit à l'identité trigonométrique

$$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta} \overset{(\dagger)}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \implies \sin\theta + \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta \overset{!}{=} \sin\theta + \sin\theta\cos\theta + \left(1-\cos^2\theta\right),$$

et ainsi ($\dagger$) est vérifié pour tout θ pour lequel l'expression est définie.

Variante de la deuxième solution Soit (d) la droite parallèle à DP passant par M. Soit (m) la droite parallèle aux bases du carré passant par N et soit $I = (m) \cap (d)$. Soit O le centre du carré. Alors $OI = AP/2$ et ainsi $I(\frac{1+p}{2}, 0) = I(\frac{f-1}{f+1}, 0)$ puisque $p = (f-3)/(f+1)$.
Par la condition d'alignement la droite FP passe par I. Soit G le point d'intersection de DI avec BC. La figure nous fait conjecturer que les droites FG et MI se coupent en E. Un calcul immédiat donne $G(1; 1/f)$.
On détermine $E' = FG \cap IM$.

$$FG : y = (1/f - f)/2 \cdot x + (1/f + f)/2 = (1 - f^2)/(2f) \cdot x + (f^2 + 1)/(2f)$$

$$MI : y = \frac{1}{(f-1)/(f+1)} \cdot x - 1 = (f+1)/(f-1) \cdot x - 1$$

Le système se résout facilement et on obtient $E'\left(\frac{f^2-1}{f^2+1}, \frac{2f}{f^2+1}\right)$.
Une vérification immédiate donne $x_G^2 + y_G^2 = 1$, donc E' se trouve sur le cercle inscrit et est E. De même $EF^2 = f^2 = FN^2$, donc FE est tangent au cercle inscrit.

Troisième solution Soit O le milieu du carré. On va montrer que $FO \perp EN$, donc FO est la médiatrice du segment EN et on conclut que $FN = FE$ comme dans les solutions précédentes. Comme $ON \perp NF$, il suffit de montrer que $\alpha := \angle NFO = \angle ENO$. Soit X l'intersection des droites ME et BC. Une rapide chasse aux angles donne $\beta := \angle EXC = \angle EMO$ et $\angle ENO = 45° - \angle EMO$. On va donc montrer que $\alpha + \beta = 45°$.
On intrdoduit le paramètre $x := |AF|$. Supposons que le carré soit de côté 2. Posons Y l'intersection des droites AB et MX. On peut alors écrire, en utilisant le parallélisme

$$|AP| = \frac{2x}{2+x}, \quad |BY| = 1 - |AP| = \frac{2-x}{2+x}, \quad |BX| = \frac{2-x}{x}.$$

En utilisant la trigonométrie dans les triangles FNO et XYB, on obtient

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{1+x}, \quad \tan(\beta) = \frac{x}{2+x}.$$

Ainsi, en utilisant la formule pour la tangente d'une somme,

$$\tan(45° - \beta) = \frac{1 - \tan(\beta)}{1 + \tan(\beta)} = \frac{x}{1+x} = \tan(\alpha).$$

On conclut que $\alpha = 45° - \beta$.

4. On note $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ telles que les trois conditions suivantes soient satisfaites pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$:

(a) $n = (f(2n) - f(n))(2f(n) - f(2n))$,

(b) $f(m)f(n) - f(mn) = (f(2m) - f(m))(2f(n) - f(2n)) + (f(2n) - f(n))(2f(m) - f(2m))$,

(c) $m - n$ divise $f(2m) - f(2n)$ si m et n sont deux nombres premiers impairs distincts.

Solution

Réponse : Il y a deux fonctions solutions : la fonction $f(n) = n + 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et la fonction $f(n) = 2^k + m$, où $n = 2^k m$ avec m impair.

En effet, soit f une solution du problème. On pose $m = n$ dans (b), et on utilise (a) pour déduire

$$f(n)^2 - f(n^2) = 2n$$

pour tous $n \geqslant 1$. Ainsi, pour $n = 1$, on a $(f(1) - 2)(f(1) + 1) = 0$ et donc $f(1) = 2$. On prouve maintenant le lemme suivant

Lemme 1. *Si $f(n) = n + 1$, alors $f(2n) \in \{n + 2, 2n + 1\}$.*

Preuve. Pour le voir, on remplace simplement $f(n) = n+1$ dans (a), et on obtient une équation quadratique en $f(2n)$ qui admet toujours deux solutions. □

On déduit directement que $f(2) = 3$. Maintenant, on pose $m = 2$ dans (b) pour obtenir après simplification, pour tous $n \geqslant 1$,

$$f(n)\,(15 - 3f(4)) = f(2n)\,(10 - 2f(4))\,.$$

Si $f(4) \neq 5$, alors $3f(n) = 2f(2n)$ et en injectant dans (a), $f(n)^2 = 4n$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui est une contradiction, car f ne prend que des valeurs entières. Donc $f(4) = 5$.

Lemme 2. $f(2^k) = 2^k + 1$ *pour tous $k \geqslant 0$.*

Preuve. On a déjà montré le résultat pour $k = 0, 1, 2$. Supposons $k \geqslant 3$ et que l'hypothèse est vraie pour tous $k' \leqslant k$. Lemme 1 implique que $f(2^{k+1}) \in \{2^k + 2, 2^{k+1} + 1\}$.

En posant $m = 2^{k-1}$ et $n = 4$ dans (b), on obtient après simplification

$$f(2^{k+1}) = 2^{k-1}\,(f(8) - 5) + 10 - f(8).$$

Or, Lemme 1 nous garantit que $f(8) \in \{6, 9\}$. Mais $f(8) = 6$ donnerait $f(2^{k+1}) = 2^{k-1} + 4$, ce qui est impossible par Lemme 1 pour $k \geqslant 3$. Donc $f(8) = 9$ et $f(2^{k+1}) = 2^{k+1} + 1$. □

Soit p un nombre premier impair. Par (a), on déduit que $f(2p) - f(p) \in \{-1, 1, -p, p\}$ et $2f(p) - f(2p) \in \{-p, p, -1, 1\}$, dans cet ordre. En additionnant ces deux équations et en utilisant le fait que f est positive, on obtient dans tous les cas que

$$f(p) = p + 1,$$

donc $f(2p) \in \{p + 2, 2p + 1\}$ par Lemme 1. On prouve maintenant que tous les nombres premiers impairs doivent satisfaire l'une ou l'autre relation.

Lemme 3. *On a soit $f(2p) = 2p + 1$ pour tous p premiers impairs, soit $f(2p) = p + 2$ pour tous p premiers impairs.*

Preuve. Supposons que $f(2p) = 2p + 1$ pour une infinité de premiers p, et que $f(2q) = q + 2$ pour un certain premier q. Ainsi, par (c), $p - q$ divise $2p - q - 1$, donc $p - q$ divise $q - 1$, ce qui contredit l'hypothèse d'infinité. L'autre cas se traite de façon similaire. □

On finit la preuve en résolvant ces deux cas séparément.

Cas 1 : $f(2p) = 2p + 1$ pour tous p premiers impairs.
Par contradiction, soit b le plus petit entier tel que $f(b) \neq b + 1$ ou $f(2b) \neq 2b + 1$. Alors par Lemme 2, $b = pa$, avec $1 < a < b$ et p premier impair, donc $f(a) = a + 1$, $f(2a) = 2a + 1$ et $f(4a) = 4a + 1$ car $2a < b$. En posant $(m, n) = (a, p)$ dans (b), on obtient $f(b) = f(ap) = ap+1 = b+1$. En posant $(m, n) = (2a, p)$ dans (b), on obtient aussi $f(2b) = f(2ap) = 2ap+1 = 2b + 1$, ce qui est une contradiction. On déduit que

$$f(n) = n + 1$$

pour tous $n \geqslant 1$.

Cas 2 : $f(2p) = p + 2$ pour tous p premiers impairs.
Notons d'abord que si n est tel que $f(n) = n + 1$ et $f(2n) = n + 2$, alors en posant $m = 2^k$ dans (b) pour $k \geqslant 1$, on obtient $f(2^k n) = n + 2^k$ par Lemme 2. En particulier, $f(2^k p) = p + 2^k$ pour tous p premiers impairs.
Par contradiction, soit $b = 2^k a$ le plus petit entier tel que $f(b) \neq a + 2^k$ ou $f(2b) \neq a + 2^{k+1}$. Par l'argument ci-dessus, on doit avoir $k = 0$ et a impair composé. Alors $a = pc$ avec p premier et $c < 2c < a$. Donc $f(c) = c + 1$, $f(2c) = c + 2$ et $f(4c) = c + 4$ par minimalité. En posant $(m, n) = (c, p)$ dans (b), on obtient $f(b) = f(pc) = pc + 1 = b + 1$. En posant $(m, n) = (2c, p)$, on obtient de même $f(2b) = f(2cp) = pc + 2 = b + 2$, ce qui est une contradiction. On déduit que

$$f(2^k n) = n + 2^k$$

pour tous $k \geqslant 1$ et pour tous n impair.

On vérifie la première solution en substituant $f(n) = n + 1$ dans (a), (b) et (c)

- $n = (2n + 1 - n - 1)(2(n + 1) - 2n - 1)$,
- $(2m + 1 - m - 1)(2(n + 1) - 2n - 1) + (2n + 1 - n - 1)(2(m + 1) - 2m - 1) = m + n = (m + 1)(n + 1) - mn - 1$,
- $m - n$ divise $2m + 1 - 2n - 1$.

Pour la deuxième solution, on pose $m = 2^{k_1} a_1$ et $n = 2^{k_2} a_2$ pour $k_1, k_2 \geqslant 1$ et a_1, a_2 impair. (a) et (b) sont vérifiés par simple substitution.

- $2^{k_2} a_2 = (2^{k_2+1} + a_2 - 2^{k_2} - a_2)(2^{k_2+1} + 2a_2 - 2^{k_2+1} - a_2)$,
- $(2^{k_1+1}+a_1-2^{k_1}-a_1)(2^{k_2+1}+2a_2-2^{k_2+1}-a_2)+(2^{k_2+1}+a_2-2^{k_2}-a_2)(2^{k_1+1}+2a_1-2^{k_1+1}-a_1) = 2^{k_1} a_2 + 2^{k_2} a_1 = (2^{k_2} + a_2)(2^{k_1} + a_1) - 2^{k_1+k_2} - a_1 a_2$.

Pour (c), observons que $f(2p) - f(2q) = p - q$ pour p, q premiers impairs distincts.