Olympiade Francophone de Mathématiques

Troisième édition

Épreuve Junior — Solutions et barèmes

1. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ divise n.

Remarque : La partie entière d'un nombre réel $x \geqslant 0$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, et on la note $\lfloor x \rfloor$. Par exemple $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ et $\lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.

Solution

Soit k un entier. On sait que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ si et seulement si $k \leqslant \sqrt{n} < k+1$, c'est-à-dire si

$$k^2 \leqslant n < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1,$$

ou encore $k^2 \leqslant n \leqslant k^2 + 2k$. Cette inégalité étant acquise, k divise n si et seulement si $n/k \in \{k, k+1, k+2\}$. À cette étape, on peut procéder autrement. En effet, en considérant $n - k^2$ et en remarquant que c'est un multiple de k, et qui vérifie $0 \leqslant n - k^2 \leqslant 2k$, on conclut que $n - k^2 \in \{0, k, 2k\}$.

En conclusion, les entiers recherchés sont ceux de la forme k^2, $k(k+1)$ ou $k(k+2)$, avec $k \geqslant 1$.

2. On considère un tableau $n \times n$, avec $n \geqslant 1$. Aya souhaite colorier k cases de ce tableau de sorte qu'il existe une unique manière de placer n jetons sur des cases coloriées sans que deux jetons ne se trouvent sur la même ligne ou la même colonne. Quelle est la valeur maximale de k pour laquelle le souhait d'Aya est réalisable ?

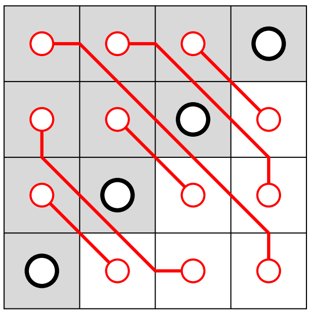
Solutions

Solution 1 Tout d'abord, Aya peut choisir la diagonale, que l'on appellera D, qui est constituée des cases de coordonnées (x, x). Aya entreprend ensuite de colorier toutes les cases situées sur D ou au-dessus de D. De proche en proche, on constate alors qu'elle n'a d'autre choix que de placer ses n jetons sur la diagonale D elle-même. En outre, en procédant ainsi, elle colorie $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ cases. Ainsi, $k \geqslant n(n+1)/2$.

Réciproquement, considérons un coloriage de k cases qui satisfait les conditions de l'énoncé, et la seule disposition possible des jetons sur ces k cases. Même si on échange deux lignes quelconques du tableau, notre coloriage satisfera toujours les conditions de l'énoncé. Par conséquent, et quitte à échanger successivement des lignes du tableau, on suppose sans perte de généralité que les jetons se trouvent sur la diagonale D.

On regroupe alors par paires les cases situées en dehors de D : chaque case de coordonnées (x, y) est appariée avec la case qui lui est symétrique par rapport à D, c'est-à-dire la case de coordonnées (y, x). Si notre coloriage contenait deux cases d'une même paire, disons les cases (x, y) et (y, x), Aya aurait pu ôter les jetons des cases (x, x) et (y, y) et les replacer en cases (x, y) et (y, x). Par conséquent, notre coloriage contient au plus une case de chaque paire. Puisque la diagonale compte n cases et que les autres cases sont réparties en $n(n-1)/2$ paires, on a donc colorié au plus $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ cases, de sorte que $k \leqslant n(n+1)/2$.

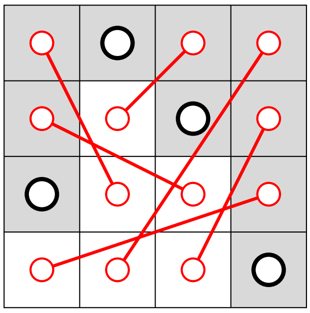
On en conclut que $k = n(n+1)/2$.



Solution 2 Tout d'abord, Aya peut placer ses jetons sans tenir compte d'un quelconque coloriage, puis colorier chaque case où se trouve un jeton, ou située au-dessus de la case qu'occupe un jeton. En procédant ainsi, elle colorie une case dans la colonne du jeton situé sur la plus haute ligne (ligne n), puis deux cases dans la colonne du jeton situé sur la ligne $n-1$, etc, de sorte qu'elle colorie $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ cases en tout. Par conséquent, $k \geqslant n(n+1)/2$.

Réciproquement, considérons un coloriage de k cases qui satisfait les conditions de l'énoncé, et la seule disposition possible des jetons sur ces k cases. On regroupe par paires les cases sur lesquelles ne se trouve aucun jeton, en procédant comme suit.

Étant donnée une case de coordonnées (x, y), soit (x, y') et (x', y) les deux cases sur lesquelles se trouvent des jetons et qui sont situées sur la ligne et la colonne de notre case. On apparie les cases (x, y) et (x', y'). De la sorte, les cases sur lesquelles ne se trouve aucun jeton sont bien regroupées deux par deux. En outre, si nos deux cases (x, y) et (x', y') étaient coloriées, Aya pourrait ôter les jetons des cases (x, y') et (x', y) pour les replacer en cases (x, y) et (x', y'). Par conséquent, notre coloriage contient au plus une case de chaque paire, et on conclut comme dans la solution précédente que $k = n(n+1)/2$.



3. Soit ABC un triangle. On note D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[AC]$. La droite parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (AD) au point X. La droite parallèle à la droite (CX) passant par le point B coupe la droite (AC) en Y. Le cercle circonscrit au triangle ABY recoupe la droite (BX) au point E. Montrer que les points C, D et E sont alignés.

Solutions

Solution 1 Notons α l'angle $\widehat{BAX}$. De la même façon que dans la première solution, on montre que $\widehat{DCA} = \widehat{EXA} = \alpha$. Les points E, B, Y et A sont cocycliques, donc $\widehat{AEB} + \widehat{AYB} = \pi$. De plus, les deux droites (BY) et (CX) sont parallèles, donc $\widehat{AYB} = \widehat{ACX}$. Par suite $\widehat{AEX} + \widehat{XCA} = \pi$, et donc les points A, C, X et E sont cocycliques. Ainsi

$$\widehat{ACE} = \widehat{AXE} = \alpha = \widehat{ACD}$$

ce qui conclut.

Solution 2 Notons α l'angle $\widehat{BAX}$. Les droites (AC) et (BX) sont parallèles et la droite (AX) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Par conséquent, on sait que $\widehat{BAX} = \widehat{XAC} = \widehat{BXA} = \alpha$. Cela signifie que le triangle BAX est isocèle en B et donc $BA = BX$.

En outre, les côtés opposés du quadrilatère $BXCY$ sont parallèles, donc $BXCY$ est un parallélogramme. Ainsi, $CY = BX = BA$. Par ailleurs, le triangle DAC est isocèle en D, donc $\widehat{ACD} = \widehat{DAC} = \widehat{XAC} = \alpha$ et $DA = DC$.

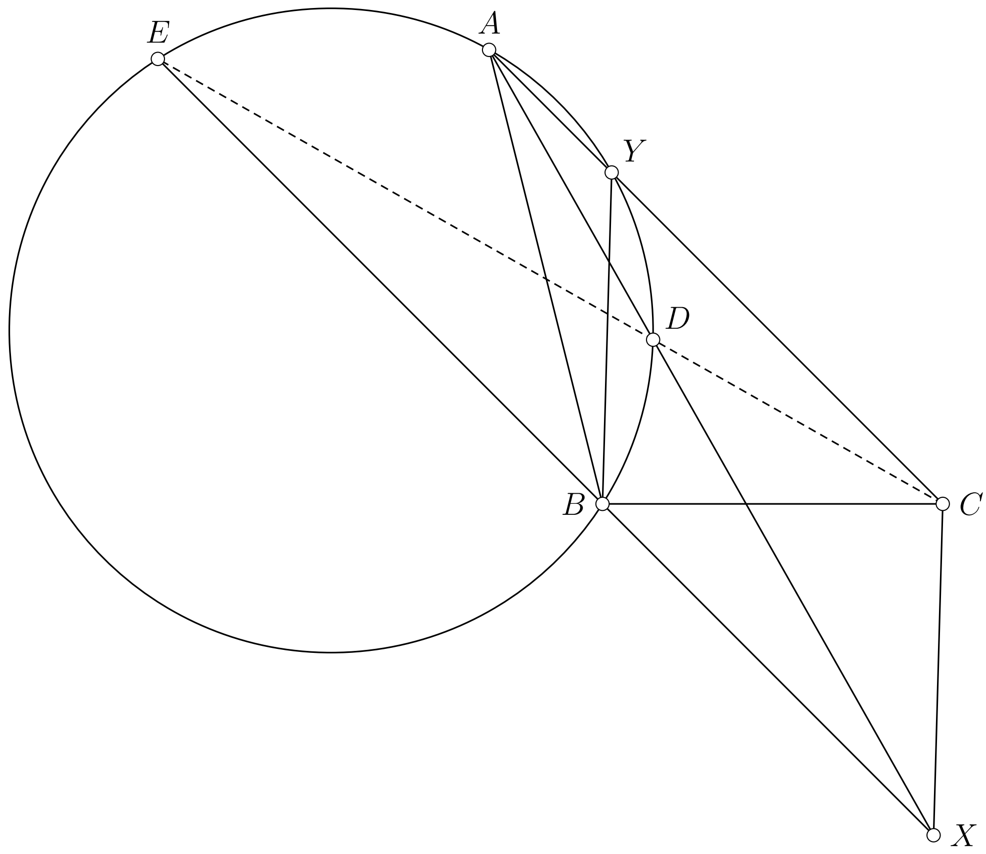
Par conséquent, les triangles DAB et DCY ont chacun un angle de mesure α qui sépare deux côtés de longueurs AB et AD, et ils sont donc isométriques. Mais alors $BD = DY$, ce qui signifie que D est le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAY}$ et de la médiatrice de $[BY]$, c'est-à-dire le pôle Sud de ABY issu de A. En particulier, les points A, B, D et Y sont donc cocycliques.

On vérifie enfin que

$$\widehat{BED} = \widehat{BAD} = \alpha = \widehat{ACD}.$$

Puisque les droites (AC) et (EX) sont parallèles, cela signifie que les angles $\widehat{BED}$ et $\widehat{ACD}$ sont alternes-internes, donc que les points C, D et E sont alignés.

Remarque Si le triangle BAY était isocèle en A, alors $(AD) = (AX)$ est la médiatrice du segment $[BY]$ et donc le triangle BXY est isocèle et par suite $BX = XY$, $\widehat{AXY} = \widehat{AXB} = \widehat{YAX} = \alpha$. Ainsi le triangle AYX est isocèle en Y. Mais alors $AY = YX = BX = YC$ indique que Y est le milieu du segment $[AC]$ et donc que (DY) est la médiatrice de $[AC]$. Puisque $\widehat{YBX} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $BXCY$ est un parallélogramme, on trouve que $\widehat{BYC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Donc $\widehat{BYD} = \widehat{BYC} - \widehat{DYC} = \alpha = \widehat{DAB}$ et par suite D est bien le pôle Sud de ABY issu de A.


E
A
Y
D
B
C
X

4. Trouver le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 = 0$$

admette comme seule solution entière $a = b = c = d = 0$.

Solutions

Solution 1 On vérifie tout d'abord que nul entier $n \leqslant 6$ ne convient. En effet, les quintuplets (a, b, c, d, n) égaux à

$$(1,0,0,1,1),\ (1,1,0,1,2),\ (1,1,1,1,3),\ (2,0,0,1,4),\ (2,1,0,1,5) \text{ et } (2,1,1,1,6)$$

sont solutions de l'équation.

Nous allons maintenant montrer que $n = 7$ est l'entier recherché. En effet, soit (a, b, c, d) une solution à l'équation de l'énoncé, telle que $|d|$ soit minimal.

Si d est impair,

$$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 1 \pmod 8.$$

Or, les seuls carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4. La relation ci-dessus est donc impossible.

Ainsi, d est pair et

$$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 4.$$

Or, les seuls carrés modulo 4 sont 0 et 1. Par conséquent, $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 0 \pmod 4$, de sorte que a, b et c sont tous pairs.

En conclusion, $(a/2, b/2, c/2, d/2)$ est aussi une solution du problème. Puisque $|d|/2 \geqslant |d|$, on en conclut que $d = 0$, donc que $a = b = c = 0$ aussi. Ainsi, $n = 7$ est bien l'entier recherché.

Solution 2 On propose ici une autre démarche pour montrer que $n = 7$ est l'entier recherché. Procédons par l'absurde et supposons l'existence de a, b, c et d, non tous nuls, tels que $a^2+b^2+c^2-7d^2 = 0$. On remarque alors que $d \neq 0$. Quitte à les diviser par leur pgcd e, on peut supposer que les entiers a, b, c et d sont premiers enter eux ; c'est-à-dire $e = 1$. En réduisant modulo 8, on vérifie que l'équation du problème donne $(a^2, b^2, c^2, d^2) \equiv (0,0,0,0), (4,4,4,4) \pmod 8$ ou $(a^2, b^2, c^2, d^2) \equiv (4,4,0,0) \pmod 8$ et ses permutations. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction avec la supposition $e = 1$.