Olympiade Francophone de Mathématiques
Troisième édition

Épreuve Senior — Solutions et barèmes

1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers m et n :

$$f(m+n) + f(m)f(n) = n^2(f(m)+1) + m^2(f(n)+1) + mn(2-mn).$$

Solutions

Solution 1 Notons $\mathbf{E}(m,n)$ l'équation de l'énoncé. L'équation $\mathbf{E}(0,0)$ indique que $f(0)=0$ ou $f(0)=-1$. Si $f(0)=0$, l'équation $\mathbf{E}(0,n)$ indique que $f(n)=n^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On suppose donc désormais que $f(0)=-1$.

L'équation $\mathbf{E}(-n,n)$ indique désormais que

$$-1 + f(n)f(-n) = n^2(f(n)+f(-n)-n^2),$$

ce que l'on factorise comme

$$(f(n)-n^2)(f(-n)-n^2) = 1.$$

Puisque $f(n)-n^2$ et $f(-n)-n^2$ sont des entiers, cela signifie que l'entier $g(n) = f(n)-n^2 = f(-n)-n^2$ est égal à ± 1.

L'équation $\mathbf{E}(m,n)$ se réécrit alors comme

$$g(m+n) + g(m)g(n) = 0,$$

ce qui signifie que la fonction $-g$ est multiplicative. Les deux fonctions g possibles sont donc $g\colon n \mapsto -1$ et $g\colon n \mapsto (-1)^{n+1}$. Par ailleurs, la fonction $n \mapsto 0$ est elle aussi multiplicative.

En conclusion, les trois fonctions solutions sont

$$f\colon n \mapsto n^2,\ f\colon n \mapsto n^2-1 \text{ et } f\colon n \mapsto n^2+(-1)^{n+1}.$$

Solution 2 Notons $\mathbf{E}(m,n)$ l'équation de l'énoncé, et posons $a = f(0)$ et $b = f(1)$. L'équation $\mathbf{E}(1,n)$ indique que

$$f(n+1) = (1-b)f(n) + bn^2 + 2n + 1,$$

ce qui se réécrit comme

$$f(n+1) - (n+1)^2 = (1-b)(f(n)-n^2).$$

- Si $b = 0$, cela signifie que $f\colon n \mapsto n^2 + a$. Réciproquement, l'équation $\mathbf{E}(m,n)$ se réécrit alors comme

  $$m^2+2mn+n^2+a+m^2n^2+am^2+an^2+a^2 = m^2n^2+(a+1)n^2+m^2n^2+(a+1)m^2+2mn-m^2n^2,$$

  c'est-à-dire comme $a(a+1) = 0$. Ainsi, la fonction $f\colon n \mapsto n^2+a$ est solution si et seulement si $a = 0$ ou $a = -1$.

- Si $b=1$, c'est que $f\colon n \mapsto n^2$, qui est un cas particulier du cas précédent.
- Si $b=2$, c'est que $f\colon n \mapsto n^2+(-1)^n a$. Réciproquement, l'équation $\mathbf{E}(m,n)$ se réécrit alors comme

$$m^2+2mn+n^2+(-1)^{m+n}a+m^2n^2+(-1)^n am^2+(-1)^m an^2+(-1)^{n+m}a^2$$
$$=$$
$$m^2n^2+((-1)^m a+1)n^2+m^2n^2+((-1)^n a+1)m^2+2mn-m^2n^2,$$

  c'est-à-dire comme $(-1)^{m+n}a(a+1)=0$. Ainsi, la fonction $f\colon n \mapsto n^2+(-1)^n a$ est solution si et seulement si $a=0$ ou $a=-1$.
- Sinon, c'est que $f\colon n \mapsto n^2+a(1-b)^n$. On sait donc que $\lim_{-\infty}(f(n)-n^2)=0$. Comme $f(n)-n^2$ est un entier, il vaut donc 0 pour un n négatif assez grand, de sorte que $a=0$ et que $f\colon n \mapsto n^2$.

En conclusion, les trois fonctions solutions sont

$$f\colon n \mapsto n^2,\ f\colon n \mapsto n^2-1 \text{ et } f\colon n \mapsto n^2+(-1)^{n+1}.$$

2. Pour se connecter au site de l'OFM, Alice doit choisir un mot de passe. Ce dernier doit être formé de n caractères parmi les 27 caractères suivants :

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ Y,\ Z,\ \#.$$

On dit qu'un mot de passe m est *redondant* si on peut colorier en rouge et bleu un bloc de lettres consécutives de m de telle manière que le mot formé des lettres rouges soit identique au mot formé des lettres bleues. Par exemple, le mot de passe $H\#ZBZJBJZ$ est redondant, car il contient le bloc $\underline{ZB}\overline{Z}\underline{J}\overline{BJ}$, où le mot ZBJ apparaît à la fois en bleu et en rouge. Au contraire, le mot de passe $ABCACB$ n'est pas redondant.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au moins 18^n mots de passe de longueur n, c'est-à-dire formés de n caractères chacun, qui ne sont pas redondants.

Solution

Ci-dessous, on note $\overline{R}_n$ l'ensemble des mots de passe non redondants de longueur n, Σ l'alphabet, et B_{2k} l'ensemble des blocs redondants de longueur $2k$. On note également $\overline{r}_n$ et b_{2k} les cardinaux respectifs de ces ensembles $\overline{R}_n$ et B_{2k}. On pose enfin $\sigma = 27$ et $\lambda = 18$.

Tout mot $m \in \overline{R}_{n+1}$ a un préfixe non redondant, ce qui fait que $\overline{R}_{n+1} \subseteq \overline{R}_n\Sigma$. Réciproquement, si un mot $m \in \overline{R}_n\Sigma$ est redondant, tout bloc redondant que contient m est un suffixe de m. En notant $2k$ la longueur d'un tel bloc, on en déduit que $m \in \overline{R}_{n+1-2k}B_{2k}$. Plus généralement, on dispose donc de la relation d'inclusion

$$\overline{R}_n\Sigma \subseteq \bigcup_{0 \leqslant 2k \leqslant n+1} \overline{R}_{n+1-2k}B_{2k}.$$

En termes de cardinaux, cette relation se réécrit comme

$$\sigma\,\overline{r}_n \leqslant \overline{r}_{n+1} + \sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n+1} \overline{r}_{n+1-2k}b_{2k}.$$

Dès lors, il s'agit de majorer aussi bien les nombres $\overline{r}_{n+1-2k}$ que les nombres b_{2k}. Or, il y a 2^{2k} manières de colorier un bloc (redondant ou pas) de longueur $2k$ puis, si ce bloc contient k lettres rouges, il y a σ^k manières de choisir ces lettres. Ainsi, il y a au plus $2^{2k} \times \sigma^k$ blocs redondants de longueur $2k$, ce qui signifie que $b_{2k} \leqslant (4\sigma)^k$.

Par ailleurs, puisque l'on a manifestement $\overline{r}_{n+1} \leqslant \sigma\,\overline{r}_n$, une idée pour démontrer que $\overline{r}_n \geqslant \lambda^n$ serait en fait de montrer que $\overline{r}_{k+1} \geqslant \lambda\overline{r}_k$ pour tout entier $k \geqslant 0$. On procède alors par récurrence. En effet, si l'on a déjà $\overline{r}_{k+1} \geqslant \lambda\overline{r}_k$ lorsque $k \leqslant n-1$, l'inégalité sur les cardinaux montre que

$$\sigma\,\overline{r}_n \leqslant \overline{r}_{n+1} + \sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n+1} \lambda^{1-2k}\,\overline{r}_n \times (4\sigma)^k \leqslant \overline{r}_{n+1} + \lambda\overline{r}_n \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{4\sigma}{\lambda^2}\right)^k = \overline{r}_{n+1} + 9\,\overline{r}_n,$$

ce qui conclut.

3. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note Δ la tangente en A au cercle Γ. Soit Γ_1 un cercle tangent aux droites Δ, (AB) et (BC), et E son point de tangence avec la droite (AB). Soit Γ_2 un cercle tangent aux droites Δ, (AC) et (BC), et F son point de tangence avec la droite (AC).

On suppose que E et F appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, et que les deux cercles Γ_1 et Γ_2 se trouvent à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Solution

Si les droites Δ et (BC) sont parallèles, soit O le centre de Γ. Alors la droite (AO) et la médiatrice du segment $[BC]$ sont perpendiculaires à Δ et à (BC), donc sont confondues. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle en A, et la médiatrice de $[BC]$ est un axe de symétrie de la figure, donc du segment $[EF]$, qui se retrouve ainsi parallèle à (BC).

Sinon, soit P le point d'intersection des droites Δ et (BC) ; alors Γ_1 et Γ_2 sont les cercles inscrit et exinscrit des triangles ABP et ACP selon les cas.

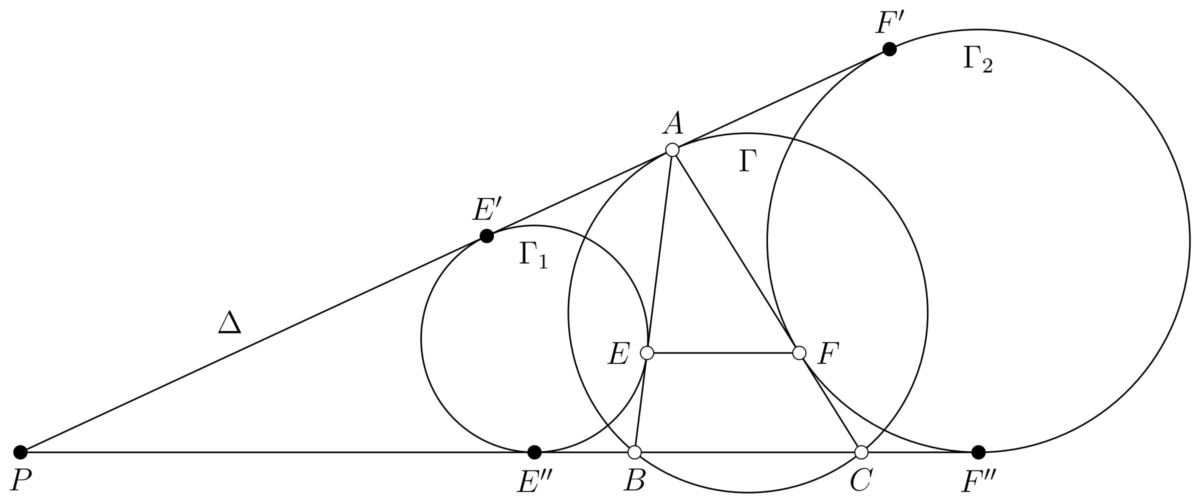
On sait alors, par la transformation de Ravi, que

$$2AE = AB + AP - PB \text{ et } 2AF = AC + PC - PA.$$

Par ailleurs, puisque Δ est tangente à Γ en A, les triangles PAB et PCA sont semblables. Par conséquent,

$$\frac{2AE}{AB} = \frac{AB}{AB} + \frac{AP}{AB} - \frac{PB}{AB} = \frac{AC}{AC} + \frac{CP}{CA} - \frac{PA}{CA} = \frac{2AF}{AC},$$

et le théorème de Thalès nous permet enfin de conclure que (BC) et (EF) sont bien parallèles.



4. Trouver tous les entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ tels que a soit pair et tous les chiffres de l'écriture décimale de $a^b + 1$ soient égaux.

Solutions

Solution 1 Le problème se réécrit comme suit : il s'agit de trouver les entiers a et b tels que $9 \times a^b + (d+9) = d \times 10^n$, avec $n \geqslant 1$ et $d \in \{1,3,5,7,9\}$. On traite donc plusieurs cas, en fonction de la valeur de d :

- Si $d \equiv 1 \pmod 4$, l'égalité de l'énoncé devient $9 \times a^b = d \times 10^n - (d+9)$. Si $n \geqslant 2$, cela signifie que $a^b \equiv 2 \pmod 4$, ce qui est incompatible avec le fait que $b \geqslant 2$. Par conséquent, $n = 1$ et $a^b = d - 1$ est égal à 0, $4 = 2^2$ ou $8 = 2^3$. Ainsi, dans ce cas, $(a,b) = (2,2)$ ou $(a,b) = (2,3)$.
- Si $d = 3$, l'égalité de l'énoncé devient $3 \times a^b = 10^n - 4$. Si $n \geqslant 3$, cela signifie que $3 \times a^b \equiv 4 \pmod 8$, donc que $b = 2$. Mais alors $3 \times a^2 \equiv 1 \pmod 5$, ce qui est impossible puisque $3 \times a^2 \equiv 0,3,2,2,3 \pmod 5$ selon que $a \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5$. Par conséquent, $n \leqslant 2$, et a^b est égal à 2 ou $32 = 2^5$. Ainsi, dans ce cas, $(a,b) = (2,5)$.
- Si $d = 7$, l'égalité de l'énoncé devient $9 \times a^b = 7 \times 10^n - 16$. Si $n \geqslant 5$, cela signifie que $9 \times a^b \equiv 16 \pmod{32}$, donc que $b = 2$ ou $b = 4$. Dans tous les cas, b est pair, et en posant $c = a^{b/2}$, on constate que $2 \times c^2 \equiv 5 \pmod 7$, ce qui est impossible puisque $2 \times c^2 \equiv 0,2,1,4,4,1,2 \pmod 7$ selon que $c \equiv 0,1,2,3,4,5,6 \pmod 7$. Par conséquent, $n \leqslant 4$, et a^b est égal à $6 = 2 \times 3$, $76 = 2^2 \times 19$, $776 = 2^3 \times 97$ ou $7776 = 2^5 \times 3^5$. Ainsi, dans ce cas, $(a,b) = (6,5)$.

En conclusion, les entiers recherchés sont les paires $(a,b) \in \{(2,2),(2,3),(2,5),(6,5)\}$.

Solution 2 Le problème se réécrit comme suit : il s'agit de trouver les entiers a et b tels que $9 \times a^b = d \times 10^n - (d+9)$, avec $n \geqslant 1$ et $d \in \{1,3,5,7,9\}$. Ici, on s'intéresse plutôt à $v_2(a^b) = bv_2(a)$ et on traite plusieurs cas en fonction de la valeur de d :

- Si $d \equiv 1 \pmod 4$, on sait que $bv_2(a) \geqslant b \geqslant 2 > 1 = v_2(d+9)$, donc $n = v_2(d+9) = 1$. Ainsi, $a^b = d - 1$ est égal à 0, $4 = 2^2$ ou $8 = 2^3$, et $(a,b) = (2,2)$ ou $(a,b) = (2,3)$.
- Si $d = 3$, on sait que $bv_2(a) \geqslant b \geqslant 2 = v_2(d+9)$. Par conséquent, soit $bv_2(a) > 2$ et $n = 2$, auquel cas $a^b = 32 = 2^5$ et $(a,b) = (2,5)$, soit $bv_2(a) = 2$ et $n > 2$. Dans ce second cas, on sait que $b = 2$, et on conclut comme dans la solution précédente que ce cas est impossible.
- Si $d = 7$, et comme dans le cas précédent, soit $bv_2(a) > 4$ et $n = 4$ auquel cas $(a,b) = (6,5)$, soit $bv_2(a) \leq 4$. Une étude exhaustive, démontre que le second cas est impossible.

En conclusion, les entiers recherchés sont les paires $(a,b) \in \{(2,2),(2,3),(2,5),(6,5)\}$.