Épreuve Junior

Problème 1

Soit $u_0, u_1, u_2, \ldots$ des nombres entiers tels que

- $u_0 = 100$;
- pour tout $k \geqslant 0$, l'inégalité $u_{k+2} \geqslant 2 + u_k$ est satisfaite ;
- pour tout $\ell \geqslant 0$, l'inégalité $u_{\ell+5} \leqslant 5 + u_\ell$ est satisfaite.

Trouver toutes les valeurs possibles pour l'entier u_{2023}.

---

§ Solution

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on sait que

$$u_n \geqslant u_{n+5} - 5 \geqslant u_{n+10} - 10 \geqslant u_{n+8} - 8 \geqslant u_{n+6} - 6 \geqslant u_{n+4} - 4 \geqslant u_{n+2} - 2 \geqslant u_n.$$

Ainsi, toutes nos inégalités sont des égalités, et $u_n = u_{n+2} - 2 = u_{n+5} - 5$.

En particulier, pour tous les entiers $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$, on a donc $u_{n+5k+2\ell} = u_n + 5k + 2\ell$. Ici, pour $n = 0$, $k = 1$ et $\ell = 1009$, cela signifie que $u_{2023} = u_0 + 2023 = 2123$. Ainsi, 2023 est la seule valeur éventuellement possible pour l'entier u_{2023}.

Réciproquement, si chaque nombre u_n est égal à $u_n + 100$, notre suite de nombres satisfait bien les conditions de l'énoncé, et $u_{2023} = 2123$. En conclusion, la seule valeur possible est bien 2123.

Problème 2

Sur son tableau, Alice a écrit n entiers supérieurs ou égaux à deux, non nécessairement distincts. Elle a ensuite le droit, autant de fois qu'elle le souhaite, d'effacer deux nombres a et b distincts l'un de l'autre et de les remplacer par q et q^2, où q désigne le produit de tous les facteurs premiers de ab (chaque facteur premier est compté une seule fois). Par exemple, si Alice efface les nombres 4 et 6, les facteurs premiers de $ab = 2^3 \times 3$ sont 2 et 3, donc Alice écrit $q = 6$ et $q^2 = 36$.

Démontrer que, au bout d'un certain temps, et quelle que soit la stratégie d'Alice, la liste des nombres écrits au tableau ne changera plus.

Remarque : On considère l'ordre des nombres dans la liste comme sans importance.

---

§ Solution

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les nombres d'Alice. Ci-dessous, lorsque X est un ensemble d'entiers fini, on notera $\prod X$ le produit de ses éléments. Par ailleurs, on note $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des facteurs premiers de a_i, et $\mathcal{P}$ la réunion de tous les ensembles $\mathcal{P}_i$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres premiers divisant au moins un nombre a_i.

Quand Alice efface deux nombres a_i et a_j pour les remplacer par les nombres $q = \prod(\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j)$ et q^2, elle ne modifie pas l'ensemble $\mathcal{P}$, et remplace chacun des ensembles $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ par leur réunion $\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j$. Ainsi, pour tout i, l'ensemble $\mathcal{P}_i$ ne peut que croître (pour l'inclusion) au cours du processus, et puisqu'il est contraint à rester un sous-ensemble de $\mathcal{P}$, il existe un moment à partir duquel $\mathcal{P}_i$ ne changera plus.

En sélectionnant le plus tardif de ces moments lorsque i varie, on obtient un moment, disons m, à partir duquel plus aucun ensemble $\mathcal{P}_i$ ne changera. On peut même choisir ce moment de sorte que tout nombre a_i sur lequel Alice agit un jour a déjà été effacé et remplacé.

Enfin, on dit qu'un nombre a_i est *petit* s'il est égal au produit $\prod(\mathcal{P}_i)$, et *grand* s'il est égal à $\prod(\mathcal{P}_i)^2$; sinon, il est *neutre*. Chaque fois qu'un nombre a_i subit une opération, il devient petit ou grand ; par la suite, il sera toujours soit petit, soit grand.

Mais alors, à partir du moment m, la liste des nombres écrits au tableau ne changera plus jamais. En effet, si Alice efface deux entiers a_i et a_j, chacun des entiers a_i et a_j était déjà petit ou grand. Puisque $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j$ et que $a_i \neq a_j$, c'est donc que l'un des entiers a_i et a_j est petit, et l'autre grand. Mais alors les nombres q et q^2 que réécrit Alice sont égaux aux entiers a_i et a_j qu'elle vient d'effacer.

Problème 3

Soit Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs O et O', tels que Γ' passe par O. Soit M un point de Γ' extérieur à Γ. Les tangentes à Γ passant par M touchent Γ en deux points A et B, et recoupent Γ' en deux points C et D. Enfin, on note E le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Démontrer que chacun des cercles circonscrits aux triangles CEO' et DEO' est tangent au cercle Γ'.

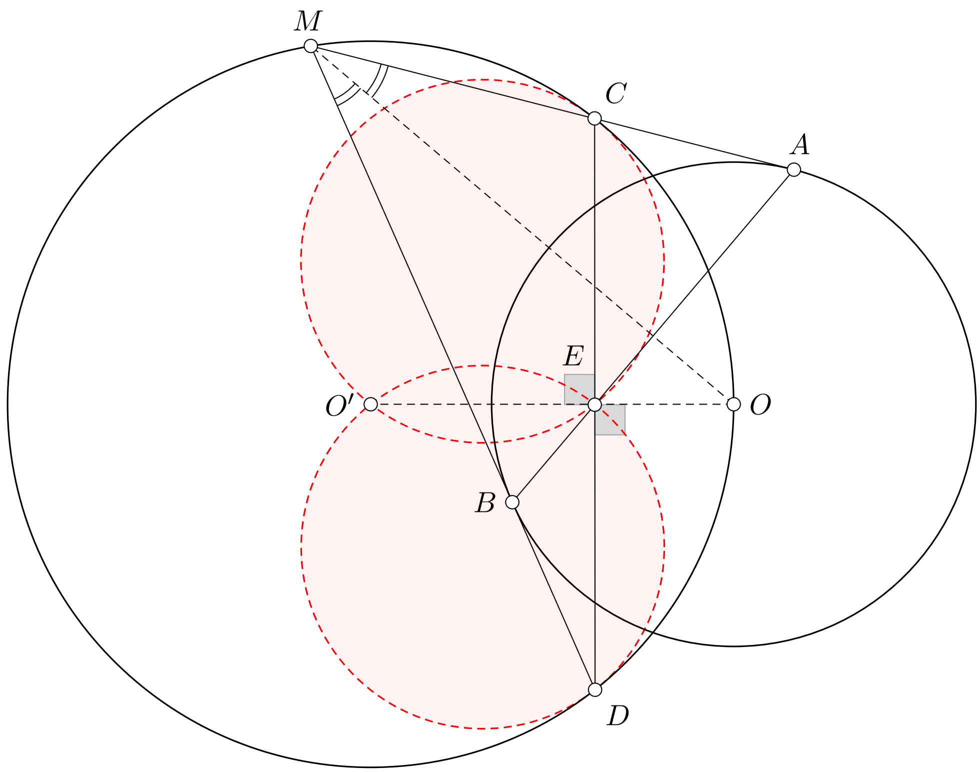
---

§ Solution n°1

Par construction, les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (OM), qui est donc confondue avec la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$. Puisque O se trouve sur le cercle circonscrit à MCD, il s'agit donc du pôle sud de MCD opposé au sommet M, c'est-à-dire du milieu de l'arc de cercle $\widehat{CD}$ ne contenant pas M. Cela signifie en particulier que $OC = OD$.

En outre, et toujours puisque O appartient au cercle circonscrit à MCD, ses projetés orthogonaux sur les côtés de MCD forment une droite de Simson. Or, les projetés orthogonaux de O sur (MC) et (MD) sont A et B. La droite de Simson de M est donc la droite (AB), et le projeté orthogonal de O sur (CD) est le point d'intersection de (AB) et (CD), c'est-à-dire le point E. Par conséquent, et puisque $OC = OD$, le point E est le milieu du segment $[CD]$.

Enfin, comme $O'C = O'D$, le triangle $O'CD$ est isocèle en O'. Le point E est donc le pied de la hauteur de $O'CD$ issue de O', ce qui signifie que les angles $\widehat{O'EC}$ et $\widehat{O'ED}$ sont droits. En d'autres termes, E appartient aux cercles de diamètres $[O'C]$ et $[O'D]$. Ces cercles, qui sont manifestement tangents à Γ', sont donc confondus avec les cercles circonscrits à CEO' et DEO', ce qui conclut.



§ Solution n°2

On propose ici une manière de redémontrer dans le cadre de l'exercice le théorème de Simson, c'est-à-dire l'alignement des points A, B et E.

On note E' le projeté orthogonal de O sur (CD). Puisque les angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{OE'D}$ sont droits, les points B, E', O et D sont cocyliques. De même, les points C, E', O et A sont cocycliques. On en déduit que

$$(E'B, E'O) = (DB, DO) = (DM, DO) = (CM, CO) = (CA, CO) = (E'A, E'O),$$

ce qui signifie bien que les droites $(E'A)$ et $(E'B)$ sont parallèles, donc confondues. Ainsi, E' appartient aux droites (AB) et (CD), donc il est confondu avec E.

§ Solution n°3

Voici une autre manière de redémontrer dans le cadre de l'exercice le théorème de Simson, c'est-à-dire l'alignement des points A, B et E. Elle nécessite de savoir au préalable que $OC = OD$.

Les triangles ACO et BCO sont isométriques, car ce sont des triangles rectangles en A et B, tels que $OA = OB$ et $OC = OD$. On note ensuite E' le point d'intersection, autre que O, des cercles circonscrits à ACO et à BDO. On vérifie alors que

$$(E'B, E'A) = (E'B, E'O) + (E'O, E'A) = (DB, DO) + (CO, CA) = (CA, CO) + (CO, CA) = 0°.$$

Cela signifie que E' appartient à la droite (AB). On montre de même que E' appartient à la droite (CD).

Ainsi, les points E et E' sont confondus. En particulier, on a donc $\widehat{CEO} = \widehat{CAO} = 90°$.

Problème 4

Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $20n+2$ divise $2023n+210$.

---

§ Solution n°1

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n+2$ divise

$$20 \times (2023n+210) - 2023 \times (20n+2) = 4200 - 4046 = 154 = 2 \times 7 \times 11,$$

dont les diviseurs sont 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77 et 154. Ainsi, $20n+2$ vaut 2 ou 22, donc n vaut 0 ou 1.

Réciproquement, $n = 0$ est une solution, car 210 est pair, mais $n = 1$ n'est pas une solution, car $2023+210$ est impair tandis que $20+2$ est pair. En conclusion, $n = 0$ est la seule solution.

§ Solution n°2

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n+2$ divise

$$20 \times (2023n+210) - 2023 \times (20n+2) = 4200 - 4046 = 154.$$

Puisque $154 < 162 = 20 \times 8 + 2$, on en déduit que $0 \leqslant n \leqslant 7$.

En outre, puisque $20n+2$ est pair, $2023n+210$ est pair aussi, donc n est pair. Il nous reste donc à étudier les cas où n vaut 0, 2, 4 ou 6.

▷ Si $n = 0$, on vérifie bien que $20n+2 = 2$ divise $2023n+210$.

▷ Si $n = 2$, on observe que $20n+2 = 42$ ne divise pas 154, car $3 \times 42 = 126 < 154 < 168 = 4 \times 42$.

▷ Si $n = 4$, on observe que $20n+2 = 82$ ne divise pas 154, car $82 < 154 < 164 = 2 \times 82$.

▷ Si $n = 6$, on observe que $20n+2 = 122$ ne divise pas 154, car $122 < 154 < 244 = 2 \times 122$.

En conclusion, $n = 0$ est la seule solution.

§ Solution n°3

Puisque $20n+2$ divise $2020n+202$, il s'agit de trouver les entiers $n \geqslant 0$ pour lesquels $20n+2$ divise $3n+8$. Or, lorsque $n \geqslant 1$, l'entier $20n+2-(3n+8) = 17n-6 \geqslant 12$ est strictement positif, ce qui signifie que $20n+2 > 3n+8 > 0$, et donc que $20n+2$ ne peut pas diviser $3n+8$. Ainsi, $n = 0$, qui est effectivement une solution.

§ Solution n°4

Puisque $20n+2$ divise $2040n+204$, il s'agit de trouver les entiers $n \geqslant 0$ pour lesquels $20n+2$ divise $17n-6$. Or, lorsque $n \geqslant 1$, on sait que $20n+2 > 17n-6 > 0$, et donc que $20n+2$ ne peut pas diviser $17n-6$. Ainsi, $n = 0$, qui est effectivement une solution.

§ Solution n°5

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque, et soit k l'entier tel que $2023n+210 = k \times (20n+2)$. Puisque

$$101 \times (20n+2) = 2020n+202 < 2023n+210 \leqslant 2100n+210 = 105 \times (20n+2),$$

on sait que $102 \leqslant k \leqslant 105$.

Il reste maintenant à vérifier les quatre valeurs de k possibles.

▷ Si $k = 102$, l'équation devient $2023n+210 = 2040n+204$, c'est-à-dire $17n = 6$. Cette équation n'a aucune solution entière.

▷ Si $k = 103$, l'équation devient $2023n+210 = 2060n+206$, c'est-à-dire $37n = 4$. Cette équation n'a aucune solution entière.

▷ Si $k = 104$, l'équation devient $2023n+210 = 2080n+208$, c'est-à-dire $57n = 2$. Cette équation n'a aucune solution entière.

- ▷ Si $k = 105$, l'équation devient $2023n + 210 = 2100n + 210$, c'est-à-dire $77n = 0$. Cette équation a $n = 0$ pour unique solution.

En conclusion, $n = 0$ est la seule solution de notre problème.

§ Solution n°6

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n + 2$ divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

En outre, puisque $20n + 2$ est pair, $2023n + 210$ est pair aussi, donc n est pair.

On pose donc $m = n/2$, de sorte que $2 \times (20m + 1)$ divise $2 \times 77m$, et donc que $20m + 1$ divise $77m$. Comme m et $20m + 1$ sont premiers entre eux, cela signifie que $20m + 1$ divise l'entier $77 = 7 \times 11$, dont les diviseurs sont 1, 7, 11 et 77. Par conséquent, $20m + 1$ vaut 1, donc $m = 0$ et $n = 0$.

Réciproquement, $n = 0$ est bien une solution.

§ Solution n°7

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n + 2$ divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Comme $20n + 2$ divise aussi $80n + 8$, il divise donc $3n + 8$. On conclut alors comme dans la solution n°3.

§ Solution n°8

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n + 2$ divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Comme $20n + 2$ divise aussi $60n + 6$, il divise donc $17n - 6$. On conclut alors comme dans la solution n°4.

§ Solution n°9

Soit $n \geqslant 0$ une solution quelconque. L'entier $20n + 2$ divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Soit alors $k \geqslant 0$ l'entier tel que $77n = k \times (20n + 2)$. Puisque $77n < 80n + 8 = 4 \times (20n + 2)$, on sait que $0 \leqslant k \leqslant 3$.

Il reste maintenant à vérifier les quatre valeurs de k possibles, ce qui se fait comme dans la solution n°5.